Équations différentielles linéaires
ED1

Fascicule d'exercices

Florent Ygouf

Table des matières

Avant de commencer à résoudre un des exercices de ce fascicule, assurez-vous de bien identifier et connaître la partie du cours concernée. Il est conseillé de ne pas rester bloqué trop longtemps sur une question (disons 15 minutes). Après ce temps il est préférable d'aller lire la correction et de ressayer plus tard sans la correction. Il est cependant **fortement** déconseillé de lire la résolution sans essayer au préalable de résoudre soi-même l'exercice. Pour rappel, certains des exercices ci-dessous se retrouveront dans les sujets de partiel ou d'examen, il est donc attendu que vous sachiez tous les résoudre !

Exercices du chapitre 1

Exercice 1.1. Soit $y : I \to \mathbb{K}$ une fonction dérivable, solution de l'équation différentielle suivante :

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

où $a, b : I \to \mathbb{K}$ sont des fonctions continues sur I. Montrer que y est de classe C^1 sur I.

Résolution. Comme la fonction $y : I \to \mathbb{K}$ est dérivable sur I, elle y est en particulier continue et la fonction $t \mapsto b(t) - a(t)y(t)$ est donc elle aussi continue sur I et coïncide avec y'. Ceci prouve que la fonction y' est continue sur I, d'où on déduit que $y \in C^1(I, \mathbb{K})$. □

Exercice 1.2. On se place dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on considère l'équation différentielle linéaire normalisée d'ordre 1 et de domaine $\mathbb{R}$ suivante :

$$y'(t) - 3y(t) = 9 \tag{1.1}$$

Trouver une solution de cette équation qui vérifie la condition de Cauchy $(i, 0)$. En existe-t-il une autre ?

Résolution. On commence par résoudre l'équation homogène associée :

$$y'(t) - 3y(t) = 0$$

Les solutions de cette équations sont de la forme $t \mapsto ce^{3t}$, avec $c \in \mathbb{C}$. On cherche ensuite une solution particulière de l'équation générale grâce la méthode de la variation de la constante, c'est à dire que l'on cherche une solution de la forme $z_0(t) = C(t)e^{3t}$ où $t \mapsto C(t)$ est une fonction à déterminer. Si z_0 est solution de (1.1) alors on a :

$$9 = z_0(t) - 3z_0(t) = C'(t)e^{3t}.$$

Il faut donc que $C'(t) = 9e^{-3t}$ et donc $C(t) = -3e^{-3t}$ convient. On montre facilement que z_0 définie par $z_0(t) = C(t)e^{3t} = -3$ est solution de (1.1) (on aurait pu deviner cette solution particulière sans calcul !). On sait d'après le cours que la solution y de (1.1) qui vérifie la condition de Cauchy $(1, 0)$ est la somme de z_0 et d'une solution de l'équation homogène associée, c'est à dire que $y(t) = ce^{3t} - 3$. On a $y(0) = i = c - 3$, d'où $c = 3 + i$. Pour conclure, la fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto (3 + i)e^{3t} - 3$ est solution de (1.1) et vérifie la condition de Cauchy $(i, 0)$ et c'est la seule d'après le cours. □

Exercice 1.3. Décrire l'ensemble S des solutions de l'équation différentielle d'ordre 1 et de domaine $\mathbb{R}$ suivante :

$$y'(t) + y(t) = te^{-t} \tag{1.2}$$

Résolution. On commence par résoudre l'équation homogène associée :

$$y'(t) + y(t) = 0$$

Les solutions de cette équation sont de la forme $t \mapsto ce^{-t}$. Ensuite, on cherche une solution particulière de (1.3) en utilisant la méthode de la variation de la constante, c'est à dire que l'on cherche une solution de la forme $z_0(t) = C(t)e^{-t}$, où $t \mapsto C(t)$ est une fonction à déterminer. So z_0 est solution de (1.3), on a

$$te^{-t} = z_0'(t) + z_0(t) = C'(t)e^{-t}. \tag{1.3}$$

Il faut dont que $C'(t) = t$ et donc $C(t) = \frac{1}{2}t^2$ convient. Réciproquement, on vérifie que la fonction $z_0 : t \mapsto \frac{1}{2}t^2e^{-t}$ est bien solution de (1.3). Enfin, on sait d'après le cours que les solutions de (1.3) s'écrivent comme la somme de la solution particulière z_0 et d'une solution de l'équation homogène associée. On a donc :

$$S = z_0 + \left\{t \mapsto ce^{-t},\ c \in \mathbb{R}\right\}$$

$\square$

Exercice 1.4. On se place dans le cadre $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Décrire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle de domaine $\mathbb{R}_+^*$ suivante :

$$y'(t) + \frac{i}{t^2+1}y(t) = \frac{e^{-i\arctan(t)}}{t}$$

Résolution. Les solutions de l'équation homogène associée sont de la forme $t \mapsto ce^{-i\arctan(t)}$ avec $c \in \mathbb{C}$ (il faut le vérifier). Ensuite, on cherche une solution particulière de l'équation en utilisant la méthode de la variation de la constante, c'est à dire que l'on cherche une solution sous la forme $z_0 : t \mapsto C(t)e^{-i\arctan(t)}$ où $t \mapsto C(t)$ est une fonction à déterminer. Si z_0 est solution, on doit avoir $C'(t)e^{-i\arctan(t)} = e^{-i\arctan(t)}/t$. On voit que $C(t) = \ln(t)$ convient. Réciproquement, on montre que la fonction $z_0 : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C}$ définie par $y(t) = e^{-i\arctan(t)}\ln(t)$ est solution de l'équation (il faut le vérifier). Comme, d'après le cours, une solution de l'équation est la somme de la solution particulière z_0 et d'une solution de l'équation homogène associée, on obtient que l'ensemble des solutions de notre équation est :

$$S = z_0 + \{Ce^{-i\arctan(t)},\ c \in \mathbb{C}\}.$$

$\square$

Exercice 1.5. On se place dans le cadre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on considère l'équation différentielle d'ordre 1 et de domaine $]-1, +\infty[$ suivante :

$$(t+1)y'(t) + ty(t) = t^2 - t + 1 \tag{1.4}$$

Trouver une solution de cette équation qui vérifie la condition de Cauchy $(1, 1)$.

Résolution. Attention, l'équation (1.4) n'est pas normalisée et on ne peut a priori pas appliquer les résultats du cours en l'état. Cependant, comme $t + 1 \neq 0$ sur $]-1, +\infty[$, on peut diviser par $t + 1$ et y est solution de (1.4) si, et seulement si, elle est solution de

$$y'(t) + \frac{t}{t+1}y(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t+1} \tag{1.5}$$

Il suffit donc de trouver la solution de (1.5) qui vérifie la condition de Cauchy $(1, 1)$. On commence par résoudre l'équation homogène associée à (1.5) :

$$y'(t) + \frac{t}{t+1}y(t) = 0$$

D'après le cours, les solutions de cette équations sont de la forme $t \mapsto c(1+t)e^{-t}$ (Pour calculer une primitive de $t \mapsto \frac{t}{1+t}$, on peut remarquer que $\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$). On cherche ensuite une solution particulière de l'équation générale grâce la méthode de la variation de la constante, c'est à dire que l'on cherche une solution de la forme $z_0(t) = C(t)(1+t)e^{-t}$ où $t \mapsto C(t)$ est une fonction à déterminer. Si z_0 est solution de (1.1) alors on a :

$$\frac{t^2-t+1}{t+1} = z_0(t) + \frac{t}{1+t}z_0(t) = C'(t)(1+t)e^{-t}.$$

Il faut donc que $C'(t) = \frac{t^2-t+1}{(t+1)^2}e^t = \left(1 - 3\frac{t}{(t+1)^2}\right)e^t$. Comme la dérivée de $t \mapsto \frac{e^t}{t+1}$ est $t \mapsto \frac{t}{(t+1)^2}e^t$, la fonction $C(t) = e^t - \frac{3}{1+t}e^t$ convient. La fonction $z_0 : t \mapsto C(t)(1+t)e^{-t} = t-2$ est une solution particulière de (1.5). On sait d'après le cours que la solution y de (1.1) qui vérifie la condition de Cauchy $(1,1)$ est la somme de z_0 et d'une solution de l'équation homogène associée, c'est à dire que $y(t) = t-2+c(1+t)e^{-t}$. On a $y(1) = 1 = -1 + 2\frac{c}{e}$, d'où $c = e$. Pour conclure, la fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto t-2+(1+t)e^{1-t}$ est la solution de (1.5) qui vérifie la condition de Cauchy $(1,1)$. $\square$

Exercice 1.6. Le taux d'alcoolémie f exprimé en $g.L^{-1}$ d'une personne ayant absorbé, à jeun, une certaine quantité d'alcool vérifie l'équation différentielle :

$$y'(t) + y(t) = ae^{-t}, \tag{1.6}$$

où a une constante qui dépend de la quantité d'alcool ingérée et de la personne et $t \geqslant 0$ représente le temps écoulé après l'ingestion, exprimé en heures.

1. Exprimer f en fonction de t et a.
2. On suppose $a = 2$. Tracer le graphe de f, déterminer le taux maximal d'alcoolémie et le temps où celui-ci est atteint.
3. Donner une valeur du temps T (à l'heure près par excès) au bout duquel le taux d'alcoolémie de cette personne est inférieur à $0.5g.L^{-1}$.

Résolution.
1. On commence par résoudre l'équation homogène associée :

$$y'(t) + y(t) = 0$$

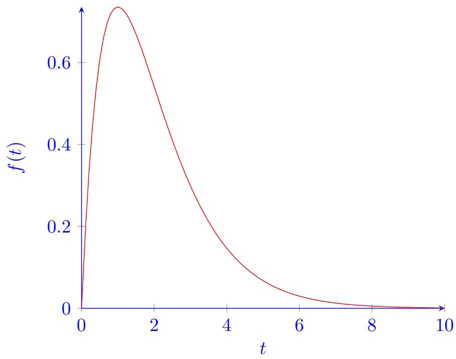
Les solutions sont de la forme $t \mapsto ce^{-t}$. On cherche ensuite une solution particulière de l'équation (1.6) en utilisant la méthode de la variation de la constante, c'est à dire en cherchant une solution de la forme $z_0 : t \mapsto C(t)e^{-t}$ où $t \mapsto C(t)$ est une fonction à déterminer. Si z_0 est solution de (1.6) alors on a :

$$ae^{-t} = z_0'(t) + z_0(t) = C'(t)e^{-t}.$$

On doit donc avoir $C'(t) = a$ et donc $C(t) = at$ convient. Réciproquement, un calcul montre que $z_0(t) = ate^{-t}$ est bien solution de (1.6). Enfin, on sait que les solutions de (1.6) s'écrivent comme la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène associée. On a donc $f(t) = ate^{-t} + ce^{-t}$ où c est une constante à déterminer. Puisque la personne est à jeun à $t = 0$, on a $f(0) = 0$ et donc on obtient $c = 0$. Finalement, on a montré :

$$f(t) = ate^{-t}.$$

2. Si $a = 2$, on a $f(t) = 2te^{-t}$. On calcule $f'(t) = 2(1-t)e^{-t}$ donc f est croissante entre 0 et 1 et décroissante après. On a $f(1) = 2e^{-1} \simeq 0.74$. De plus $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$ par croissance comparée.



3. On cherche à l'instant $T \geqslant 1$ à partir duquel :

$$f(t) = 2te^{-t} \leqslant 0.5.$$

Comme f est décroissante sur $[1, +\infty[$, $f(2) \sim 0.54$ et $f(3) \sim 0.29$, on en déduit $T = 3$. □

Exercice 1.7. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soient $a, b \in C^0(I, \mathbb{K})$. On considère l'équation différentielle d'ordre 1 et de domaine I suivante :

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t). \tag{1.7}$$

Le but de cet exercice de donner une justification théorique au fait que la méthode la variation de la constante vue en cours permet toujours de trouver une solution particulière à l'équation (1.7). Soit $A : I \to \mathbb{K}$ une primitive de a et définissons :

$$P : I^2 \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad (s, t, y_0) \mapsto y_0 e^{A(s)-A(t)}.$$

1. Soit $(s, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. Montrer que la fonction $t \mapsto P(s, t, y_0)$ est une fonction dérivable sur I et est solution de l'équation homogène associée à (1.7). Que vaut $P(s, s, y_0)$?
2. Soit $(s, t) \in I^2$. Montrer que l'application $y_0 \mapsto P(s, t, y_0)$ est un isomorphisme linéaire de $\mathbb{K}$ et calculer son inverse.
3. Soit $(y_0, t_0) \in \mathbb{K} \times I$ et supposons que z_0 est une solution de (1.7) vérifiant la condition de Cauchy (y_0, t_0). On définit $\lambda : t \mapsto P(t, t_0, z_0(t))$. Donner une interpretation de la fonction λ.
4. Montrer que λ est dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$ et calculer sa dérivée. En déduire l'expression de λ puis de celle de z_0.
5. En déduire qu'une solution de (1.7) est de la forme $t \mapsto C(t)e^{-A_{t_0}(t)}$ où $t \mapsto C(t)$ est une fonction dérivable sur I et A_{t_0} est la primitive que a qui s'annule en t_0.

Résolution.
1. Soit $f : t \mapsto P(s, t, y_0)$. La fonction A est dérivable sur I, de dérivée a et $t \mapsto y_0 e^t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée. La fonction f est donc dérivable sur I comme composée de fonctions dérivables. On calcule :

$$f'(t) + a(t)f(t) = -a(t)y_0 e^{A(s)-A(t)} + a(t)y_0 e^{A(s)-A(t)} = 0$$

Donc f est bien solution de l'équation homogène associée à (1.7). On remarque que $P(s, s, y_0) = y_0$.
Remarque : La quantité $P(s, t, y_0)$ s'interprète donc comme la valeur en t de la solution de l'équation homogène associée à (1.7) qui satisfait la condition de Cauchy (y_0, s).

2. On vérifie directement que $y_0 \mapsto P(s,t,y_0)$ est linéaire, d'inverse $y_0 \mapsto P(t,s,y_0)$.

3. Si une solution de l'équation homogène associée à (1.7) a pour valeur $z(t)$ en t, quelle était sa valeur en t_0 ? La réponse est $\lambda(t)$.

4. On a $\lambda(t) = z_0(t)e^{A(t)-A(t_0)}$. En utilisant la règle de dérivation d'un produit et le fait que z_0 est solution de (1.7), on obtient :

$$\begin{aligned}\lambda'(t) &= z_0'(t)e^{A(t)-A(t_0)} + a(t)z_0(t)e^{A(t)-A(t_0)} \\ &= \left(b(t) - a(t)z_0(t)\right)e^{A(t)-A(t_0)} + a(t)z_0(t)e^{A(t)-A(t_0)} \\ &= b(t)e^{A(t)-A(t_0)}\end{aligned}$$

En utilisant $\lambda(t_0) = z_0(t_0) = y_0$ par définition, on obtient $\lambda(t) = y_0 + \int_{t_0}^t b(s)e^{A(s)-A(t_0)}\,ds$. On en déduit :

$$\begin{aligned}z_0(t) = \lambda(t)e^{A(t_0)-A(t)} &= e^{A(t_0)-A(t)}\left(y_0 + \int_{t_0}^t b(s)e^{A(s)-A(t_0)}\,ds\right) \\ &= y_0e^{A(t_0)-A(t)} + \int_{t_0}^t b(s)e^{A(s)-A(t)}\,ds.\end{aligned}$$

5. La fonction $t \mapsto A(t) - A(t_0)$ est la primitive de a qui s'annule en t_0 donc coïncide avec A_{t_0}. D'après la réponse à la question 4, on a

$$z_0(t) = C(t)e^{-A_{t_0}(t)}$$

où $C(t) = y_0 + \int_{t_0}^t b(s)e^{A_{t_0}(s)}\,ds$.

□

Exercice 1.8. On se place dans le cadre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre 1 et de domaine $\mathbb{R}$ suivantes :

1. $ty'(t) - 2y(t) = t^3$
2. $t^2y'(t) - y(t) = 0$

Résolution.
1. Supposons que l'on dispose d'une fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et qui soit solution de l'équation. En divisant par t sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$, on voit que la restriction de y à $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$ est solution de

$$y'(t) - \frac{2}{t}y(t) = t^2.$$

Les solutions des équations homogène associées sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$ (ces deux équations ont la même forme mais des domaines différents) sont de la forme $t \mapsto ct^2$. On cherche ensuite une solution particulière de ces équations en utilisant la méthode de la variation de la constante et on trouve $z_0^- : t \mapsto t^3$ est solution l'équation sur $\mathbb{R}^-$ et $z_0^+ : t \mapsto t^3$ est solution sur $\mathbb{R}^+$. On trouve donc qu'il existe C^- et C^+ telles que :

$$y(t) = \begin{cases} t^3 + C^-t^2 & \text{si } t < 0 \\ t^3 + C^+t^2 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Réciproquement, pour tout $C^+, C^- \in \mathbb{R}$, la fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$y(t) = \begin{cases} t^3 + C^-t^2 & \text{si } t < 0 \\ t^3 + C^+t^2 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

est dérivable et solution de l'équation. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est :

$$S = \left\{ t \mapsto \begin{cases} t^3 + C^- t^2 & \text{si } t < 0 \\ t^3 + C^+ t^2 & \text{si } t > 0 \end{cases}, \text{ avec } C^+, C^- \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable qui est solution de l'équation différentielle. En divisant par t^2 en dehors de 0, on voit que y est solution de :

$$y'(t) - \frac{1}{t^2} y(t) = 0$$

sur $\mathbb{R}^-$ et $\mathbb{R}^+$. On détermine l'ensemble des solutions de ces deux équations linéaires normalisées d'ordre 1, de domaine $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$ et on trouve que

$$y(t) = \begin{cases} \lambda e^{-1/t} & \text{si } t < 0 \\ \mu e^{-1/t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

On a $\lim_{t \to 0^+} \mu e^{-1/t} = 0$ alors que

$$\lim_{t \to 0^-} \lambda e^{-1/t} \begin{cases} +\infty & \text{si } \lambda > 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda < 0 \\ 0 & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

Comme a on supposé que y est dérivable, elle est en particulier continue en 0 et donc $\lambda = 0$. On a donc prouvé qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ telle que :

$$y(t) = \begin{cases} \mu e^{-1/t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Réciproquement, soit $\mu \in \mathbb{R}$ et soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$y(t) = \begin{cases} \mu e^{-1/t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On montre facilement que y est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. De plus, comme $\lim_{t \to 0^-} y'(t) = \lim_{t \to 0^+} y'(t) = 0$, on en déduit que y est dérivable en 0 et que $y'(0) = 0$, d'après le "Théorème de la limite de la dérivée". On peut maintenant montrer que y est solution de l'équation différentielle. On en déduit que l'ensemble des solutions est :

$$S = \left\{ t \mapsto \begin{cases} \mu e^{-1/t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \ \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

□

Exercices du chapitre 2

Exercice 2.1 (Caractérisation séquentielle de la continuité pour les fonctions vectorielles)**.** Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé, soit $f : I \to E$ et soit $t_0 \in I$. Montrer que f est continue en t_0 si, et seulement si, pour toute suite (t_n) qui tend vers t_0, on a $\lim_{n\to\infty} f(t) = f(t_0)$.

Résolution. Supposons que f est continue en t_0. Soit (t_n) une suite qui tend vers t_0. On veut montrer que $f(t_n)$ tend vers $f(t_0)$ c'est à dire que $\|f(t_n) - f(t_0)\| \to 0$ quand $n \to +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en t_0 il existe par définition $\eta > 0$ tel que pour tout $t_1 \in I$ avec $|t_1 - t_0| < \eta$, on a $\|f(t_1) - f(t_0)\| < \varepsilon$. Comme $t_n \to t_0$ quand $n \to +\infty$, il existe par définition $n_0 > 0$ tel que pour tout $n > n_0$ on a $|t_n - t_0| < \eta$, et donc $\|f(t_n) - f(t_0)\| < \varepsilon$. Comme ε était choisi arbitrairement, on a prouvé que $f(t_n) \to f(t_0)$ quand $n \to +\infty$.

Pour la réciproque, on suppose par l'absurde qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall \eta > 0$ il existe $t(\eta) \in I$ avec $|t(\eta) - t_0| < \eta$ mais $\|f(t(\eta)) - f(t_0)\| > \varepsilon$. Par construction, la suite $t_n = t(1/n)$ converge vers t_0 donc on devrait avoir $f(t_n) \to f(t_0)$ mais on a aussi par construction $\|f(t_n) - f(t_0)\| > \varepsilon$, ce qui est une contradiction. On a donc que f est continue en t_0.

□

Exercice 2.2. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{cases} (t\ln(t), t^2) & \text{si } t > 0 \\ (0,0) & \text{si } t = 0 \end{cases}$. Est-ce que l'application f est continue ?

Résolution. D'après un résultat du cours, pour montrer que f est continue, il suffit de montrer que ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont continues. On a $t\ln(t) \to 0$ quand $t \to 0^+$ (en utilisant la règle de l'Hôpital par exemple) donc la première coordonnée est bien continue. De même, $t^2 \to 0$ quand $t \to 0^+$ donc la seconde coordonnée est aussi continue. On en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}^+_*$. □

Exercice 2.3. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (e^{t^2}, \sqrt{t})$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+_*$ et calculer sa dérivée. Est-ce que f est dérivable en 0 ?

Résolution. D'après un résultat du cours, pour montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+_*$, il suffit de montrer que les coordonnées de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont dérivables. Les fonctions $t \mapsto e^{t^2}$ et $t \mapsto \sqrt{t}$ sont bien dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et on a alors, toujours d'après le cours :

$$f'(t) = (2te^{t^2}, \frac{1}{2\sqrt{t}}).$$

Par contre, la seconde coordonnée de f n'est pas dérivable en 0, donc f n'est pas dérivable en 0. □

Exercice 2.4. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur à n, muni de sa structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et soit $f : \mathbb{R} \to E,\ t \mapsto P(t \cdot X)$. Montrer que f est continue.
2. Montrer que f est dérivable et exprimer sa dérivée en fonction du polynôme P'.

Résolution.
1. Écrivons $P = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell X^\ell$. On a alors $f(t) = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell t^\ell X^\ell$ et donc les coordonnés de f dans la base des X^ℓ sont les $f_\ell : t \mapsto a_\ell t^\ell$. Elles sont bien continues donc f est aussi continue.
2. Les f_ℓ sont aussi dérivables, de dérivée $t \mapsto \ell a_\ell t^{\ell-1}$ si $\ell > 0$ et 0 sinon. La fonction f est donc dérivable et on a :

$$f'(t) = \sum_{\ell=0}^{n} f'_\ell(t) X^\ell = X \sum_{\ell=1}^{n} \ell a_\ell (tX)^{\ell-1} = XP'(tX).$$

□

Exercice 2.5. Soit $I \subset \mathbb{R}$ et soient $A, B : I \to M_n(\mathbb{K})$ deux fonctions vectorielles à valeurs dans l'espace des matrices carrées de taille n. On définit la fonction suivante :

$$P : I \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto A(t)B(t)$$

1. On suppose que A et B sont continues. Montrer que P est elle aussi continue
2. On suppose maintenant que A et B sont dérivables sur I. Montrer que P est aussi dérivable et calculer sa dérivée.

Résolution.
1. Soient $a_{i,j} : I \to \mathbb{K}$ et $b_{i,j} : I \to K$ les coordonnées de A et B dans la base canonique de $M_n(K)$. D,après la formule du produit matriciel, le coefficient (i, j) de $P(t)$ est :

$$P_{i,j}(t) := \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(t) b_{k,j}(t),$$

Ce qui veut dire que les $P_{i,j} : I \to \mathbb{K}$ sont les coordonnées de P dans la base canonique. Si A et B sont continues, les $a_{i,k}$ et les $b_{k,j}$ le sont aussi et donc les $P_{i,j}$ sont continues comme somme de produits de fonctions continues. Ceci prouve que P est elle même continue.
2. Si A et B sont dérivables, les $a_{i,k}$ et les $b_{k,j}$ le sont aussi et donc les $P_{i,j}$ sont dérivables comme somme de produits de fonctions dérivables. Ceci prouve que P est aussi dérivable. De plus, on a

$$P'_{i,j}(t) := \sum_{k=1}^{n} a'_{i,k}(t) b_{k,j}(t) + a_{i,k}(t) b'_{k,j}(t) = \big(A'(t)B(t) + A(t)B'(t)\big)_{i,j},$$

On a donc prouvé que

$$P'(t) = A'(t)B(t) + A(t)B'(t).$$

Il est intéressant de remarquer que l'on retrouve la formule de la dérivée d'un produit d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{K}$ quand $n = 1$. □

Exercice 2.6. Soit $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}^2, t \mapsto (\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, 2t)$. Calculer $\int_0^{1/2} f(t)\, dt$.

Résolution. Par définition, on a :

$$\int_0^{1/2} f(t)\ dt = \left(\int_0^{1/2} \sqrt{1-t^2}\ dt, \int_0^{1/2} 2t\ dt\right)$$

et donc

$$\int_0^{1/2} f(t)\ dt = (\arcsin(1/2), 1/4) = (\pi/6, 1/4).$$

$\square$

Exercice 2.7. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E. Soit $f : I \to E$ une fonction continue telle que pour tout $t \in I$, on a $f(t) \in F$. Montrer que :

$$\forall a, b \in I, \quad \int_a^b f(t)\ dt \in F.$$

Résolution. Soit $e_1, \ldots, e_p$ une base de F que l'on complète en une base $\mathcal{B}$ de E. Comme pour tout $t \in I$, on a $f(t) \in F$, l'écriture de f dans $\mathcal{B}$ s'écrit $f = \sum_{i=1}^p f_i(t)e_i$ (les coordonnées de f sur les autres vecteurs de $\mathcal{B}$ sont nulles). On a alors par définition :

$$\int_a^b f(t)\ dt = \sum_{i=1}^p \left(\int_a^b f_i(t)\ dt\right) e_i \in F.$$

$\square$

Exercice 2.8.

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$. Montrer que :
$$e^{PAP^{-1}} = Pe^A P^{-1}.$$
2. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ et soit $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Calculer PAP^{-1}.
3. En déduire la valeur de e^A.

Résolution.
1. Par une récurrence immédiate, on montre que pour tout $\ell \geqslant 0$, on a $(PAP^{-1})^\ell = PA^\ell P^{-1}$. Ainsi

$$\sum_{\ell=0}^N \frac{(PAP^{-1})^\ell}{\ell!} = \sum_{\ell=0}^N P\frac{A^\ell}{\ell!}P^{-1} = P\left(\sum_{\ell=0}^N \frac{A^\ell}{\ell!}\right)P^{-1}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{\ell=0}^N \frac{(PAP^{-1})^\ell}{\ell!} - Pe^A P^{-1}\right\| &= \left\|P\left(\sum_{\ell=0}^N \frac{A^\ell}{\ell!} - e^A\right)P^{-1}\right\| \\ &\leqslant \|P\|\ \left\|\sum_{\ell=0}^N \frac{A^\ell}{\ell!} - e^A\right\|\ \|P^{-1}\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Ceci prouve bien que $e^{PAP^{-1}} = Pe^A P^{-1}$. $\square$

2. On trouve que $PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

3. On a vu en cours que (et il faut être sûr de savoir le refaire) :

$$e^{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{bmatrix}.$$

On en déduit de la formule vue en 1. que

$$e^A = e^{P^{-1}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}P} = P^{-1}e^{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}P = P^{-1}\begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{bmatrix}P = \begin{bmatrix} 2e^2 - e^3 & e^2 - e^3 \\ 2e^3 - 2e^2 & 2e^3 - e^2 \end{bmatrix}.$$

Exercice 2.9. Soit $A : \mathbb{R} \to M_2(\mathbb{R}),\ t \mapsto \begin{bmatrix} t^2 - t + 2 & 1 - t \\ 2(t-1) & t^2 + 2t - 1 \end{bmatrix}$ et soit $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{bmatrix} t^2 + 1 \\ -t^2 - 1 \end{bmatrix}$. Le but de cet exercice est de trouver l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ qui vérifient l'équation différentielle matricielle suivante :

$$f'(t) + A(t)f(t) = B(t) \tag{2.1}$$

1. Soit $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Calculer pour tout $t \in \mathbb{R}$ la valeur de $D(t) = PA(t)P^{-1}$.
2. Supposons que l'on dispose d'une solution f de (2.1). Montrer que la fonction $g : t \mapsto Pf(t)$ est solution l'équation plus simple suivante :

$$g'(t) + \begin{bmatrix} t^2 + 1 & 0 \\ 0 & t^2 + t \end{bmatrix} g(t) = \begin{bmatrix} t^2 + 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. En déduire une expression simple de g.
4. Conclure.

Résolution.

1. On trouve $PA(t)P^{-1} = \begin{bmatrix} t^2 + 1 & 0 \\ 0 & t^2 + t \end{bmatrix}$.

2. On a $g'(t) = Pf'(t)$ (il faut savoir le prouver), donc si on multiplie (2.1) par P, on trouve

$$g'(t) + PA(t)f(t) = P\begin{bmatrix} t^2 + 1 \\ -t^2 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 + 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Et on conclut en remarquant, d'après la question précédente, que $PA(t)f(t) = D(t)g(t)$.

3. Soient $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les fonctions coordonnées de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, c'est à dire que $g(t) = (g_1(t), g_2(t))$. D'après la question précédente, on voit que g_1 est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante :

$$y'(t) + (t^2 + 1)y(t) = t^2 + 1 \tag{2.2}$$

et que g_2 est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante :

$$y'(t) + (t^2 + t)y(t) = 0 \tag{2.3}$$

En résolvant c'est deux équations, on montre qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ telles que $g_1(t) = \lambda e^{-\frac{t^3}{3} - t} + 1$ et $g_2(t) = \mu e^{-\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}}$.

4. Comme $g(t) = Pf(t)$ et que P est inversible (son déterminant vaut 1), on a alors $f = P^{-1}g$, d'òu on déduit :

$$f(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) - g_2(t) \\ 2g_2(t) - g_1(t) \end{bmatrix}.$$

Réciproquement, on montre que toutes les fonctions f de cette forme sont solutions de (2.1)

$\square$

Exercice 2.10. Le but de cet exercice est de trouver l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient l'équation suivante :

$$f'(t) - f(-t) = 0 \tag{2.4}$$

1. Supposons que l'on dispose d'une solution f de (2.4) puis définissons $g_1 : t \mapsto \frac{1}{2}(f(t) + f(-t))$ et $g_2 : t \mapsto \frac{1}{2}(f(t) - f(-t))$. Montrer que la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = g_1(t) + ig_2(t)$$

   est solution de l'équation $g'(t) - ig(t) = 0$.
2. En déduire un expression de g.
3. Conclure.

résolution.

1. Cela découle d'un simple calcul en utilisant que f est solution de (2.4).
2. Il s'agit de résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et de domaine $\mathbb{R}$. En utilisant le cours, on sait alors qu'il une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $g(t) = \lambda e^{it}$.
3. On a que $f = g_1 + g_2$ (c'est la décomposition en partie paire et impaire de f) puis g_1 est la partie réelle de g et g_2 est sa partie imaginaire. Si on écrit $\lambda = x + iy$, on a alors $g_1 = x\cos(t) - y\sin(t)$ et $g_2 = x\sin(t) + y\cos(t)$ et donc f est de la forme $a\cos(t) + b\sin(t)$ avec $a = x + y$ et $b = x - y$. Réciproquement, une fonction de la forme $t \mapsto a\cos(t) + b\sin(t)$ est solution de (2.4) si et seulement si $a = b$. On en déduit que l'ensemble des fonctions solutions de (2.4) est l'ensemble $\{t \mapsto a(\cos(t) + \sin(t)) \mid a \in \mathbb{R}\}$. $=$ $\square$

Exercices du chapitre 3

Exercice 3.1. Soit $A :]1, +\infty[\to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{1}{1-t}\begin{bmatrix} t^2 - 3t + 2 & 2t - 2 \\ t^2 - 3t + 1 & 2t - 1 \end{bmatrix}$ et soit $B :]1, +\infty[\to \mathbb{R},\ t \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - t \end{bmatrix}$.
Dans cet exercice, on se propose de trouver la solution du système différentiel de rang 2 et de domaine $]1, +\infty[$ suivant :

$$Y'(t) + A(t)Y(t) = B(t)$$

et qui vérifie la condition de Cauchy $(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, 0)$.

1. Soit $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Montrer que $P^{-1}A(t)P = \begin{bmatrix} -t & -1 \\ 0 & \frac{1}{1-t} \end{bmatrix}$. On note $D(t)$ cette dernière matrice.
2. Si $t \mapsto Y(t)$ est solution, trouver la valeur de $P^{-1}Y(t)$ en utilisant la question précédente.
3. Conclure.
4. A votre avis, pourquoi a-t-il été plus facile de trouver $P^{-1}Y$ que Y directement ?

Résolution.
1. Il suffit de calculer. Attention aux étourderies !

2. Soit $Z : t \mapsto P^{-1}Y(t)$. D'après la question précédente, on voit que Z est solution du système différentiel suivant, plus simple :

$$Z'(t) + D(t)Z(t) = B(t)$$

et vérifie la condition de Cauchy $Z(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Soient $z_1, z_2 :]1, +\infty[$ les coordonnées de Z dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, c'est à dire $Z(t) = (z_1(t), z_2(t))$. Le système précédent se récrit :

$$\begin{aligned} z_1'(t) - tz_1(t) + -z_2(t) &= 0 \\ z_2'(t) + \frac{1}{1-t}z_2(t) &= 1 - t \end{aligned}$$

On peut commencer par trouver z_2 en utilisant le premier chapitre du cours et on obtient $z_2(t) = 1 - t^2$ (on a utilisé la condition de Cauchy $z_2(0) = 1$). L'équation donnant z_1 devient alors en remplaçant z_2 par son expression :

$$z_1'(t) - tz_1(t) = 1 - t^2$$

On obtient cette fois-ci $z_1(t) = t$, d'où $Z(t) = (t, 1 - t^2)$.
3. Finalement, on en déduit :

$$Y(t) = PZ(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ 2t+1-t^2 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Exercice 3.2. Soit $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{K})$. Trouver les solutions du système différentiel de rang 3 et de domaine $\mathbb{R}$ suivant :

$$Y'(t) + AY(t) = 0$$

Résolution. Soit $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Un calcul montre que $B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et que pour tout $n \geqslant 3$, on a $B^n = 0_{M_3(\mathbb{K})}$. On peut donc écrire $A = aI_3 + bB + cB^2$. En utilisant le fait que l'exponentielle de la somme de matrices qui commutent est le produit de leur exponentielle, on a

$$\exp(-tA) = e^{-ta}\exp(-tbB)\exp(-tcB^2)$$

De plus, on calcule que $\exp(-tbB) = I_3 - tbB + \frac{t^2b^2}{2}B^2$ et $\exp(-tcB^2) = I_3 - tcB^2$. On obtient donc que

$$\begin{aligned} \exp(-tA) &= e^{-ta}\left(I_3 - tbB + \frac{t^2b^2}{2}B^2\right)\left(I_3 - tcB^2\right) \\ &= e^{-ta}\begin{bmatrix} 1 & -tb & \frac{t^2b^2}{2} - tc \\ 0 & 1 & -tb \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la formule du cours pour les solutions d'un système différentiel scalaire, on a qu'une solution $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$ telle que $Y(0) = (\alpha, \beta, \gamma)$ s'écrit :

$$Y(t) = \exp(-tA)Y(0) = \alpha e^{-ta}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta e^{-ta}\begin{bmatrix} -tb \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma e^{-ta}\begin{bmatrix} \frac{t^2b^2}{2} - tc \\ -tb \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Exercice 3.3 (Unicité des solutions dans le théorème de Cauchy-Lipschitz)**.** On considère le système différentiel de rang n, de domaine $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}^n$ suivant :

$$Y'(t) + A(t)Y(t) = 0 \qquad (*)$$

où $A : I \to M_n(\mathbb{K})$ est continue. Dans cet exercice on se propose de montrer qu'il existe au plus une solution de $(*)$ vérifiant une condition de Cauchy donnée (c'est la partie *unicité* du théorème de Cauchy-Lipschitz).

1. Soient $a, b \in I$, soit $Y : I \to \mathbb{R}$ une solution de $(*)$. Montrer qu'il existe $M_1, M_2 > 0$ tels que :

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\} \sup_{t \in [a,b]} |y_i(t)| < M_1$$

et

$$\forall i, j \in \{1, \cdots, n\} \quad \sup_{t \in [a,b]} |a_{i,j}(t)| < M_2$$

Où les y_i et les $a_{i,j}$ sont les coordonnées de Y et A dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $M_n(\mathbb{K})$.

2. Supposons qu'il existe $t_0 \in [a, b]$ tel que $Y(t_0) = 0_{\mathbb{K}^n}$. Montrer que

$$Y(t) = -\int_{t_0}^{t} A(s)Y(s)\, ds.$$

et en déduire que pour tout $k \geqslant 0$, on a

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\},\ \forall t \in [a, b] \quad |y_i(t)| < M_1 n^k M_2^k \frac{|t - t_0|^k}{k!}.$$

3. Toujours en supposant que $Y(t_0) = 0$, montrer en utilisant la question précédente que pour tout $t \in [a, b]$, on a $Y(t) = 0$.
4. En déduire que s'il existe $t_0 \in I$ tel que $Y(t_0) = 0$ alors $Y = 0$.
5. Conclure qu'il existe au plus une seule solution de $(*)$ vérifiant une condition de Cauchy donnée, c'est à dire que si $Y_1, Y_2 : I \to \mathbb{K}^n$ sont deux solutions de $(*)$ telles que $Y_1(t_0) = Y_2(t_0)$ alors $Y_1 = Y_2$.

Résolution.
1. Les fonctions vectorielles $t \mapsto A(t)$ et $t \mapsto Y(t)$ sont continues. D'après un résultat du chapitre 2, cela entraîne que leurs coordonnées dans les bases canoniques sont aussi continues. Le résultat découle alors du fait qu'une fonction à valeurs dans $\mathbb{K}$ et continue est bornée (et atteint ses bornes) sur un segement.
2. Pour la première partie de la question, il suffit d'intégrer l'équation $(*)$ et la deuxième partie s'obtient par récurrence sur k en utilisant les bornes de la question précédente.
3. On rappelle que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $\frac{\alpha^k}{k!} \to 0$ quand $k \to +\infty$. (il faut savoir le prouver, par exemple en remarquant que le quotient de termes successifs de cette suite est ¡ 1 à partir d'un certain rang, ce qui veut dire que la suite est asymptotiquement sous-géométrique). On déduit donc de la borne de la question précédente que pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$ et tout $t \in [a, b]$ on a $y_i(t) = 0$ et donc $Y(t) = 0$.
4. Soit $t \in I$. Pour montrer que $Y(t) = 0$, il suffit d'appliquer la question précédente avec $a = t_0$ et $b = t$. On a bien $[t_0, t]$ qui est contenu dans I puisque I est un intervalle.
5. Il suffit d'appliquer la question précédente à $Y(t) = Y_1(t) - Y_2(t)$ qui est bien solution de $(*)$ par linéarité et qui vérifie $Y(t_0) = Y_1(t_0) - Y_2(t_0) = 0$.

□

Exercice 3.4. On considère le système différentiel de rang n et de domaine $I \subset \mathbb{R}$ suivant :

$$Y'(t) + A(t)Y(t) = B(t), \qquad (*)$$

et on suppose qu'il existe un sous-espace vectoriel $F \subset \mathbb{K}^n$ tel $\forall t \in I$, $A(t)F \subset F$ et $B(t) \subset F$. Montrer que si $t \mapsto Y(t)$ est une solution de l'équation ci-dessus telle $Y(t_0) \in F$ pour un $t_0 \in I$ alors $\forall t \in I$, on a $Y(t) \in F$. On pourra considérer avec profit la matrice P d'un projecteur sur un supplémentaire G de F parallèlement à F et comparer Y et PY.

Résolution. Les hypothèses impliquent que $PA(t) = PA(t)P$ et $PB(t) = 0$. Ceci veut dire qu'en multipliant $(*)$ par P, on trouve que $t \mapsto PY(t)$ est solution de

$$Z'(t) + PAZ(t) = 0.$$

De plus, comme $Y(t_0) \in F$, on a en aussi $PY(t_0) = 0$ et donc par unicité de la solution, on trouve donc que $\forall t \in I, PY(t) = 0$, c'est à dire que $Y(t)$ est contenu dans F. □

Exercice 3.5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} y_1'(t) - 6y_1(t) - 3y_2(t) = -3t + 4e^{3t} \\ y_2'(t) + 4y_1(t) + y_2(t) = 4t - 4e^{3t} \end{cases}$$

Si on définit $A = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, on pourra calculer PAP^{-1} avec $P = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Résolution. Ceci revient à résoudre le système différentiel **scalaire** suivant :

$$Y'(t) + AY(t) = \begin{bmatrix} -3t + 4e^{3t} \\ 4t - 4e^{3t} \end{bmatrix}$$

On suit les trois étapes du guide de résolution fournit dans le cours.

1. On commence par calculer les solutions du système différentiel homogène associé en utilisant l'exponentielle des matrices. Un calcul montre que :

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

et donc

$$e^{-tA} = P^{-1} \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 4e^{3t} - 3e^{2t} & 3e^{3t} - 3e^{2t} \\ -4e^{3t} + 4e^{2t} & -3e^{3t} + 4e^{2t} \end{bmatrix}$$

On en déduit que les solutions du système différentiel homogène associé sont de la forme :

$$Y(t) = e^{-tA} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3(x+y)e^{2t} + (4x+3y)e^{3t} \\ 4(x+y)e^{2t} - (4x+3y)e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda e^{3t} - 3\mu e^{2t} \\ -\lambda e^{3t} + 4\mu e^{2t} \end{bmatrix}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. On utilise maintenant la méthode de la variation de la constante, c'est à dire que l'on cherche une solution particulière Z_0 du système différentiel sous la forme

$$Z_0(t) = e^{-tA} C(t)$$

où $t \mapsto C(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ est une fonction à déterminer. En injectant dans le système différentiel, on voit que pour être solution, C doit satisfaire :

$$C'(t) = e^{tA} \begin{bmatrix} -3t + 4e^{3t} \\ 4t - 4e^{3t} \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ te^{-2t} \end{bmatrix}$$

On pose alors

$$C(t) = P^{-1} \begin{bmatrix} 4t \\ (-\frac{t}{2} - \frac{1}{4})e^{-2t} \end{bmatrix}$$

et on obtient :

$$Z_0(t) = e^{-tA} C(t) = P^{-1} \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4t \\ (-\frac{t}{2} - \frac{1}{4})e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4te^{3t} + \frac{3t}{2} + \frac{3}{4} \\ -4te^{3t} - 2t - 1 \end{bmatrix}$$

Réciproquement, il faut montrer que Z_0 comme défini ci-dessus est bien une solution particulière du système différentiel.

3. D'après le cours, les solutions s'écrivent comme la somme d'une solution du système différentiel homogène associé et de la solution particulière Z_0 trouvée ci-dessus, ainsi :

$$S = \left\{ t \mapsto \begin{bmatrix} \lambda e^{3t} - 3\mu e^{2t} \\ -\lambda e^{3t} + 4\mu e^{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4te^{3t} + \frac{3t}{2} + \frac{3}{4} \\ -4te^{3t} - 2t - 1 \end{bmatrix}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Solution alternative. On peut aussi procéder de la façon suivante : Si $Y : I \to \mathbb{R}^2$ est solution du système différentiel, alors $Z : t \mapsto PY(t)$ est solution du système différentiel :

$$Z'(t) + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} Z(t) = PB(t).$$

Dénotant par z_1, z_2 les coordonnées de Z, ceci est équivalent à :

$$\begin{cases} z_1'(t) - 3z_1(t) = 4e^{3t} \\ z_2'(t) - 2z_2(t) = t \end{cases}$$

On peut résoudre indépendamment ces équations différentielles pour obtenir qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases} z_1(t) = \lambda e^{3t} + 4te^{3t} \\ z_2(t) = \mu e^{2t} + -\frac{t}{2} - \frac{1}{4} \end{cases}$$

Enfin, on trouve Y en multipliant Z par P^{-1}, ce qui redonne le résultat :

$$Y(t) = P^{-1}Z(t) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda e^{3t} - 3\mu e^{2t} + 4te^{3t} + \frac{3t}{2} + \frac{3}{4} \\ -\lambda e^{3t} + 4\mu e^{2t} - 4te^{3t} - 2t - 1 \end{bmatrix}$$

□

Exercice 3.6. Trouver les solutions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ du système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} y_1'(t) - y_1(t) - 2y_2(t) = t \\ y_2'(t) + 4y_1(t) + 3y_2(t) = 0 \end{cases}$$

Si on définit $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, on pourra calculer $P^{-1}AP$ avec $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1-i & i-1 \end{bmatrix}$.

Résolution. Un calcul montre que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{bmatrix}$$

On résout le système différentiel suivant :

$$Y'(t) + AY(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. D'après le cours, les solutions du système différentiel homogène associé sont de la forme

$$Y(t) = e^{-tA}.Y_0 = e^{-t} \begin{bmatrix} (\lambda-\mu)\cos(2t) + (\lambda+\mu)\sin(2t) \\ 2\mu\cos(2t) - 2\lambda\sin(2t) \end{bmatrix}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

2. On chercher maintenant une solution particulière avec la méthode de la variation de la constante, c'est à dire que l'on cherche une solution Z_0 sous la forme

$$Z_0(t) = e^{-tA}C(t)$$

où $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est une fonction à déterminer. Pour que Z_0 soit solution, il faut que

$$C'(t) = e^{tA} \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} te^{t(1+2i)} & 0 \\ 0 & te^{t(1-2i)} \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il suffit alors de poser

$$C(t) = P\begin{bmatrix} (\frac{t}{1+2i} - \frac{1}{(1+2i)^2})e^{t(1+2i)} & 0 \\ 0 & (\frac{t}{1-2i} - \frac{1}{(1-2i)^2})e^{t(1-2i)} \end{bmatrix} P^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et donc on obtient

$$Z_0(t) = e^{-tA}C(t) = P\begin{bmatrix} \frac{t}{1+2i} - \frac{1}{(1+2i)^2} & 0 \\ 0 & \frac{t}{1-2i} - \frac{1}{(1-2i)^2} \end{bmatrix} P^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (tA^{-1} - A^{-2})\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3t}{5} - \frac{1}{25} \\ -\frac{4t}{5} + \frac{8}{25} \end{bmatrix}$$

.

3. Finalement, puisque les solutions sont la somme d'une solution du système différentiel homogène associé et de la solution particulière Z_0, on obtient :

$$S = \left\{ t \mapsto \begin{bmatrix} (\lambda - \mu)\cos(2t) + (\lambda + \mu)\sin(2t) + \frac{3t}{5} - \frac{1}{25} \\ 2\mu\cos(2t) - 2\lambda\sin(2t) + -\frac{4t}{5} + \frac{8}{25} \end{bmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{C} \right\}$$

Pour qu'une telle solution soit réelle, il faut et il suffit que $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$\square$

Exercices du chapitre 4

Exercice 4.1. Soient $p, q \in \mathbb{C}$ et supposons que $\Delta := p^2 - 4q$ s'annule (le cas où $\Delta \neq 0$ a été traité en partiel). Le but de cet exercice est de redécouvrir les formules du cours qui donnent les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = 0 \tag{E}$$

où y' et y'' dénotent les dérivées premières et secondes de y. On dénote par $S_0 \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des solutions de (E) à valeurs dans $\mathbb{C}$ et définies sur $\mathbb{R}$, c'est à dire l'ensemble des $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fois dérivables qui vérifient (E). Comme on a supposé $\Delta = 0$, le polynôme $X^2 + pX + q$ possède une seule racine complexe de multiplicité 2 que l'on dénote par r.

1. Montrer que $r^2 = q$ et $2r = -p$.
2. Supposons que l'on dispose d'une solution y de (E) et posons $f(t) = y'(t) - ry(t)$. Montrer que f est dérivable et qu'elle est solution de l'équation différentielle suivante :
$$f'(t) - rf(t) = 0. \tag{E_1}$$
3. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. En résolvant l'équation (E_1) donner l'expression de $f(t)$ en fonction de t, de $y(t_0)$ et de $y'(t_0)$.
4. En déduire l'expression de $y(t)$ en fonction de t, de $y(t_0)$ et de $y'(t_0)$.
5. En déduire que pour tout $(y_0, y_1, t_0) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}$, il existe une unique solution z de (E) qui vérifie $z(t_0) = y_0$ et $z'(t_0) = y_1$.
6. Montrer que S_0 est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et en donner une base.

Résolution.
1. On a $X^2 + pX + q = (X - r)^2$. On obtient le résultat en développant le polynôme de droite et en identifiant les coefficients avec ceux du polynôme de droite.
2. On a $f'(t) = y''(t) - ry'(t)$ donc $f'(t) - rf(t) = y''(t) - 2ry'(t) + r^2 y(t) = 0$. La dernière égalité découle de la question précédente et du fait que y est solution de (E).
3. On a d'après le cours $f(t) = f(t_0)e^{r(t-t_0)} = (y'(t_0) - ry(t_0))e^{r(t-t_0)}$.
4. On peut retrouver y à partir de f en résolvant l'équation différentielle $y'(t) - ry(t) = f(t)$. Pour résoudre celle-ci, on peut utiliser soit la méthode de la variation de la constante soit la formule de Duhamel et dans les deux cas on trouve :

$$y(t) = \big((t - t_0)(y'(t_0) - ry(t_0)) + y(t_0)\big)\, e^{r(t-t_0)}.$$

5. Pour l'existence, il suffit d'utiliser la formule de la question précédente et pour l'unicité, la formule précédente montre qu'une solution est complètement déterminer par sa valeur et la valeur de sa dérivée en un temps t_0.

5. Il faut commencer par montrer que S_0 est un sous-espace vectoriel. Ensuite, soit $\Phi : S_0 \to \mathbb{C}^2, y \mapsto (y(t_0), y'(t_0))$. Cette application est linéaire et la question précédente montre qu'elle est à la fois injective et surjective, il s'agit donc d'un isomorphisme linéaire et en on déduit que $\dim_{\mathbb{C}}(S_0) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2) = 2$. Une base est $\{t \mapsto e^{rt}, t \mapsto te^{rt}\}$. □

Exercice 4.2. Trouver les fonctions $y :]0, \pi[\to \mathbb{R}$ qui satisfont l'équation suivante :

$$y''(t) + y(t) = \operatorname{cotan}(t)$$

Résolution. On commence par décrire l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée, ce qui nous est donné par le cours. On sait qu'une base de l'ensemble S_0 des solutions de cette équation homogène associée est $\{\cos(t), \sin(t)\}$. Ensuite, on cherche une solution particulière $z_0 :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ de cette équation sous la forme $z_0(t) = c_1(t)\cos(t) + c_2(t)\sin(t)$ où

$$A(t)\begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \operatorname{cotan}(t) \end{bmatrix}, \text{ où } A(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}.$$

Comme $\det(A(t)) = 1$, la matrice $A(t)$ est inversible et on trouve :

$$\begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{bmatrix} = A(t)^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \operatorname{cotan}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \operatorname{cotan}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(t) \\ \frac{1}{\sin(t)} - \sin(t) \end{bmatrix}$$

Il suffit alors de prendre $c_1(t) = -\sin(t)$ et $c_2(t) = \ln(|\tan(\frac{t}{2})|) + \cos(t)$. Finalement, les solutions de l'équation de la forme

$$t \mapsto c_1\cos(t) + \left(c_2 + \ln(|\tan(\frac{t}{2})|\right)\sin(t) \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

□

Exercice 4.3. Trouver une fonction deux fois dérivable $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $y(0) = y'(0) = 0$ et qui vérifie l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^t - t - 1$$

En existe-t-il une autre ?

Démonstration. On a $\Delta = 1$ et les racines du polynôme caractéristique sont 1 et 2 donc le cours nous donne directement une base de solution de l'équation homogène associée $\{t \mapsto e^t, t \mapsto e^{2t}\}$. Pour trouver une solution particulière z_0, on utilise la méthode de la variation de la constante, c'est à dire que l'on cherche z_0 sous la forme

$$z_0(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)e^{2t},$$

avec

$$A(t)\begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t - t - 1 \end{bmatrix}, \text{ où } A(t) = \begin{bmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^t & 2e^{2t} \end{bmatrix}.$$

comme $\det(A(t)) = e^{3t}$, la matrice $A(t)$ est inversible et on trouve

$$\begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{bmatrix} = A(t)^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ e^t - t - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+t)e^{-t} - 1 \\ e^{-t} - (t+1)e^{-2t} \end{bmatrix}$$

On peut donc choisir

$$\begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(2+t)e^{-t} - t \\ -e^{-t} + (\frac{2t+3}{4})e^{-2t} \end{bmatrix}$$

et finalement, on obtient notre solution particulière

$$z_0(t) = e^t - te^t - \frac{t}{2} - \frac{5}{4}.$$

Pour trouver la solution y qui vérifie la condition de Cauchy $((0,0),0)$, on écrit que y est la somme d'une solution de l'équation homogène associée et de notre solution particulière z_0

$$y(t) = c_1e^t + c_2e^{2t} - te^t - \frac{t}{2} - \frac{5}{4}$$

et on doit avoir

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

ce qui implique

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

et finalement, on a

$$y(t) = e^t + \frac{1}{4}e^{2t} - te^t - \frac{t}{2} - \frac{5}{4}.$$

$\square$

Exercice 4.4. Trouver les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui satisfont l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = \frac{e^{-2t}}{1+t^2}$$

Résolution. On a $\Delta = 0$ et le polynôme caractéristique a une unique racine $r = -2$ de multiplicité 2. Une base de l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est alors donnée par $\{t \mapsto e^{-2t}, t \mapsto te^{-2t}\}$. On cherche ensuite une solution particulière z_0 de l'équation sous la forme $z_0(t) = c_1(t)e^{-2t} + c_2(t)te^{-2t}$, où

$$A(t) \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{e^{-2t}}{1+t^2} \end{bmatrix}, \text{ où } A(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ -2e^{-2t} & (1-2t)e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

comme $\det(A(t)) = e^{-4t}$, la matrice $A(t)$ est inversible et donc

$$\begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{bmatrix} = A^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{e^{-2t}}{1+t^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-t}{1+t^2} \\ \frac{1}{1+t^2} \end{bmatrix}$$

On peut donc choisir

$$\begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\ln(1+t^2) \\ \arctan(t) \end{bmatrix}$$

nous avons donc trouver une solution particulière

$$z_0(t) = -\frac{1}{2}\ln(1+t^2)e^{-2t} + \arctan(t)te^{-2t}.$$

Comme toute solution s'écrit comme la somme d'une solution de l'équation homogène associée et de notre solution particulière, on a prouvé :

$$S=\left\{t\mapsto\Big(c_1-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)+c_2t+\arctan(t)t\Big)e^{-2t},\ c_1,c_2\in\mathbb{R}\right\}$$

□

Exercice 4.5 (Abaissement de l'ordre pour les EDL d'ordre 2)**.** Le but de cet exercice est de vous faire découvrir une astuce permettant de trouver les autres solutions d'une EDL, même non scalaire, quand on en connaît déjà une. C'est une technique très utile et j'attends de vous que vous sachiez la réutiliser (si vous voyez ce que je veux dire...). On considère l'équation suivante :

$$a(t)y''(t)+b(t)y'(t)+c(t)y(t)=f(t)$$

et supposons que l'on dispose d'une solution particulière $z_0(t)$ de l'équation homogène associée.

1. A quelle condition sur $z(t)$ la fonction $t\mapsto z(t)z_0(t)$ est solution de l'équation ?
2. Que vous inspire la réponse à la question précédente ?

Résolution.
1. En injectant $z(t)z_0(t)$ dans l'équation et en utilisant que z_0 en est une solution de l'équation homogène associée, on voit qu'il faut que $z'(t)$ soit solution de l'EDL d'ordre 1 non normalisée suivante :

$$\alpha(t)y'(t)+\beta(t)y(t)=f(t)$$

avec

$$\alpha(t)=a(t)z_0(t),\ \text{ et } \beta(t)=2a(t)z_0'(t)+b(t)z_0(t)$$

2. Nous avons vu dans le cours que les EDL d'ordre 2 ont toujours des solutions mais nous ne savons pas les expliciter en règle générale. La question précédente nous indique cependant que ceci devient possible, même dans le cas non scalaire, dès lors lors qu'on dispose d'une solution particulière de l'équation homogène associée car on peut se ramener à la résolution d'une équation d'ordre 1, que l'on sait explicitement résoudre d'après le chapitre 1 du cours.

□

Exercice 4.6. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(2t+1)y''(t)+(4t-2)y'(t)-8y(t)=0$$

1. Donner une condition sur α pour que $t\mapsto e^{\alpha t}$ soit solution de l'équation.
2. En utilisant la technique de l'abaissement de l'ordre vu dans l'exercice précédent, déterminer les autres solutions.

Résolution.
1. Si $t\mapsto e^{\alpha t}$ est solution, on doit avoir

$$(2t+1)\alpha^2+(4t-2)\alpha-8=(2\alpha^2+4\alpha)t+\alpha^2-2\alpha-8$$

Or, une fonction de la forme $t\mapsto at+b$ ne s'annule sur $\mathbb{R}$ que si $a=b=0$. On doit donc avoir $\alpha=-2$. On vérifie que $t\mapsto e^{-2t}$ est bien solution.
2. Soit z une solution quelconque de notre EDL et posons $y(t)=z(t)e^{2t}$. En appliquant la méthode de l'abaissement de l'ordre, on voit que y' doit être solution de

$$(2t+1)f'(t)-(4t+6)f(t)=0$$

Il s'agit d'une EDL d'ordre 1 non normalisée. Comme la fonction $t \mapsto 2t+1$ s'annule en $t = -\frac{1}{2}$, on introduit les intervalles $I_1 =]-\infty, -\frac{1}{2}[$ et $I_2 =]-\frac{1}{2}, +\infty[$. On doit avoir que la restriction de y' à I_1 ou I_2 est solution de l'EDL normalisée :

$$f'(t) - \frac{4t+6}{2t+1} f(t) = 0$$

et on en déduit, en utilisant la méthode de résolution des EDL d'ordre 1, qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ telles que

$$\begin{cases} y'(t) = & \lambda_1 e^{2t}(2t+1)^2 \quad \text{si } t < -\frac{1}{2} \\ y'(t) = & \lambda_2 e^{2t}(2t+1)^2 \quad \text{si } t > -\frac{1}{2} \end{cases} \tag{4.1}$$

Comme une primitive de $t \mapsto (2t+1)^2 e^{2t}$ est $t \mapsto (2t^2 + \frac{1}{2})e^{2t}$, on a donc qu'il existe $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} y(t) = & \lambda_1 e^{2t}(2t^2 + \frac{1}{2}) + c_1 \quad \text{si } t < -\frac{1}{2} \\ y(t) = & \lambda_2 e^{2t}(2t^2 + \frac{1}{2}) + c_2 \quad \text{si } t > -\frac{1}{2} \end{cases} \tag{4.2}$$

d'où on déduit que

$$\begin{cases} z(t) = & \lambda_1 (2t^2 + \frac{1}{2}) + c_1 e^{-2t} \quad \text{si } t < -\frac{1}{2} \\ z(t) = & \lambda_2 (2t^2 + \frac{1}{2}) + c_2 e^{-2t} \quad \text{si } t > -\frac{1}{2} \end{cases} \tag{4.3}$$

De plus, comme z est deux fois dérivable, elle est en particulier continue et sa dérivée est continue et on doit avoir

$$\begin{cases} \lambda_1 + c_1 e & = & \lambda_2 + c_2 e \\ \lambda_1 - 2c_1 e & = & \lambda_2 - 2c_2 e \end{cases} \tag{4.4}$$

Ceci implique que $c_1 = c_2$ et $\lambda_1 = \lambda_2$. Réciproquement, on vérifie qu'une fonction $t \mapsto z(t)$ définie par $z(t) = \lambda(2t^2 + \frac{1}{2}) + ce^{-2t}$ avec $\lambda, c \in \mathbb{R}$ est deux fois dérivable et solution de

$$(2t+1)y''(t) + (4t-2)y'(t) - 8y(t) = 0.$$

En particulier, l'ensemble des solutions est de dimension 2.

□

Exercice 4.7. Soit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. On suppose que P admet n racines distinctes et considérons l'équation différentielle suivante :

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} = 0$$

1. Donner une base de l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$ de cette équation.
2. A quelle condition sur les racines de P est-ce que les solutions sont bornées sur $\mathbb{R}$? et sur $\mathbb{R}^+$?

Résolution.
1. Si r est une racine de P alors $y : t \mapsto e^{rt}$ est solution de l'équation, ceci donne n solutions, une pour chaque racine de P. De plus, une famille $\{t \mapsto e^{\lambda_i t}\}_{i \in I}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dès lors que les λ_i sont deux à deux distincts. Enfin, on sait que l'ensemble des solutions S est de dimension n. On peut donc conclure qu'une base de S est formée des $t \mapsto e^{tr}$ où r parcourt l'ensemble des racines de P.
2. Pour que les solutions soient bornées sur $\mathbb{R}$ il faut et il suffit que les racines de P soient de partie réelle nulle. Pour que les solutions soient bornées sur $\mathbb{R}^+$, il faut et il suffit que les racines de P soient de partie réelle négative.

□