Équations différentielles linéaires ED1

Notes de cours

Florent Ygouf

Université de Rennes

Table des matières

Introduction **2**
Présentation de l'UE 2
Organisation de l'UE 3
Conseils méthodologiques 3
Prérequis 3

1 Equations différentielles linéaires d'ordre 1 **4**
1.1 Définitions 4
1.2 Equation homogène associée 5
1.3 Résolution de (E) 6
1.4 Guide pratique de résolution 7
1.5 Un exemple de résolution 7
1.6 Un exemple de résolution dans le cas non normalisé 8

2 Fonctions vectorielles et exponentielle **10**
2.1 Continuité, dérivabilité et intégration 10
2.2 Algèbres normées 13
2.3 Exponentielle 14
2.4 Un calcul élémentaire de dérivée 15

3 Systèmes différentiels **16**
3.1 Définitions 16
3.2 Système différentiel homogène associé 17
3.3 Description de l'ensemble des solutions de (3.1) 18
3.4 Systèmes différentiels scalaires 19
3.5 Guide pratique de résolution 21
3.6 Exemple de résolution 21

4 Équations différentielles linéaires d'ordre supérieur **24**
4.1 Définitions 24
4.2 Un principe de transfert 24
4.3 Résolution de l'équation (4.1) 25
4.4 Equations différentielles d'ordre 2 scalaires 26
4.5 Guide pratique de résolution des EDL d'ordre 2 scalaires 29

5 Quelques exemples d'équations différentielles se ramenant à une équation différentielle linéaire **30**
5.1 Définitions 30
5.2 Équation de Bernoulli 31
5.3 Equation de Riccatti 31
5.4 Équation à variables séparées 32

Introduction

Présentation de l'UE

Ce cours est une introduction aux équations différentielles, c'est à dire des équations reliant une fonction inconnue et une ou plusieurs de ses dérivées. Voici un premier exemple d'équation différentielle :

$$y''(t) + \sin(y(t)) = 0. \tag{1}$$

Cette célèbre équation décrit l'évolution de la position angulaire y d'un pendule pesant en fonction du temps t. Dans ce cours, nous nous concentrerons principalement sur une famille d'équations différentielles bien particulières, appelées équations différentielles linéaires. Voici un exemple d'une telle équation :

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + \cdots + a_1(t)y^{(1)}(t) + a_0(t)y(t) = b(t). \tag{2}$$

Bien que les équations différentielles rencontrées dans la nature ne soient pas linéaires en règle générale, il y a au moins trois raisons de commencer par celles-ci. Tout d'abord il y a un intérêt pédagogique car elles sont plus simples à aborder que leurs grandes soeurs non-linéaires et le bagage mathématiques enseigné en deuxième année de licence de mathématiques est suffisant. Ensuite, il y a un intérêt théoriques car les équations différentielles linéaires sont parmi les seules pour lesquelles nous disposions d'une méthode de résolution générale. Enfin il y a un intérêt pratique puisque les solutions d'équations non-linéaires peuvent souvent être approchées par des solutions d'équations linéaires. Par exemple, si nous cherchons les solutions de (1) qui sont proches de zéro (on parle de petites oscillations) alors en utilisant $\sin(x) \sim x$ au voisinage de zéro, on peut remplacer l'équation (1) par l'équation simplifiée suivante :

$$y''(t) + y(t) = 0. \tag{3}$$

et montrer que les solutions de (3) fournissent de bonnes approximations des solutions de (1). Notons que l'équation (3) est un cas particulier de (2) avec $n = 2$, $a_2(t) = a_0(t) = 1$ et $a_1(t) = b(t) = 0$. Nous verrons plus loin comment décrire les solutions de cette équation. On s'intéressera aussi à des systèmes d'équations différentielles linéaires, dont voici un exemple :

$$\begin{cases} s'(t) = & -\frac{\beta}{N}s(t) \\ i'(t) = & \frac{\beta}{N}s(t) - \gamma i(t) \\ r'(t) = & \gamma i(t) \end{cases} \tag{4}$$

Le système d'équation (4) permet de modéliser la propagation d'une épidémie dans une population de taille N et de prédire à chaque instant t le nombre d'individus sains $s(t)$, le nombre d'individus infectés $i(t)$ et le nombre d'individus retirés (morts ou guéris) $r(t)$. Les facteurs β et γ sont des paramètres qui dépendent de l'épidémie étudiée.

En plus d'être un objet mathématique fascinant, les équations différentielles sont omniprésentes et sont utilisées dans tous les pans de nos sociétés modernes pour optimiser, prédire, organiser, se divertir, se faire la guerre, explorer l'espace et les fonds marins... etc. Nous renvoyons à cet excellent Podcast pour un point de vue historique sur les équations différentielles, depuis les travaux fondateurs de Newton et Leibniz jusqu'à nos jours.

Organisation de l'UE

Cette UE est constituée de 18h de cours magistraux et de 30h de travaux dirigés et permet d'obtenir 6 ECTS (1 ECTS correspond théoriquement à environ 25h de travail, cours et TD inclus). Il y aura 4 notes : une note de partiel, une note d'examen final, une note de devoir à la maison à réaliser en binôme et enfin une note de QCM portant sur le cours à réaliser à la fin de chaque chapitre. Les feuilles de TD seront composées d'exercices corrigés. Les sujets du partiel et de l'examen final seront composés pour moitié d'exercices traités en TD, en DM ou en QCM, pour le quart d'exercices proches de ceux vus en TD et pour le quart d'exercices proposant des développements des notions vues en cours et TD. Ainsi, une note sur 20 évaluera

1. la capacité à reproduire des raisonnements connus (10 pts)
2. la capacité à adapter des raisonnements connus (5 pts)
3. la capacité à élaborer sur des notions vues en cours et en TD (5pts)

La répartition des points ci-dessus est indicative, elle pourra être amenée à évoluer légèrement. La formule utilisée pour calculer la note finale à l'UE est :

$$\max\left\{\frac{\text{qcm}}{8}+\frac{\text{dm}}{8}+\frac{\text{partiel}}{4}+\frac{\text{examen}}{4},\ \text{examen}\right\}$$

Conseils méthodologiques

Chaque cours doit être suivi d'1h30 (au minimum !) de travail personnel pour être compris, mémorisé et digéré. Attention, une lecture passive n'est pas suffisante, il faut lire avec esprit critique et donner beaucoup d'importance aux exemples et contre-exemples. Du plus, chaque séance de cours ou de TD doit être précédée d'une relecture du cours précédent d'au moins 30 minutes pour réactiver les connaissances nécessaires. Il est attendu de venir aux séances de TD avec le support du cours.

Prérequis

Les pré-requis pour cette UE sont les modules AN1 (calcul d'intégrales et primitives), AG2 (espace vectoriels, bases, matrices, applications linéaires), AP2 (fonction d'une variable réelle, continuité, dérivabilité, calcul de dérivé) et AN3 (primitives et intégrales, développements limités) de la première année et du premier semestre de la deuxième année de la licence de l'université de mathématiques de Rennes (lien vers la maquette de la licence de mathématiques).

Nous aurons aussi besoin des notions abordées durant les UE AG4 (réductions des endomorphismes) et AN4 (espaces vectoriels normés) qui se dérouleront en parralèle de cette UE.

Chapitre 1

Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Objectifs :

1. Reconnaître une équation différentielle linéaire (EDL) d'ordre 1.
2. Savoir décrire la structure de l'ensemble des solutions.
3. Connaître la forme générale des solutions.
4. Savoir résoudre en pratique les EDL d'ordre 1.

1.1 Définitions

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Definition 1.1.1. *Une équation différentielle linéaire normalisée d'ordre* 1 *et de domaine* $I \subset \mathbb{R}$ *est une équation de la forme*

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t), \tag{E}$$

où a *et* b *sont deux fonctions à valeurs dans* $\mathbb{K}$*, définies et continues sur l'intervalle* $I \subset \mathbb{R}$.

Résoudre l'équation (E) c'est trouver l'ensemble des fonctions $y : I \to \mathbb{K}$ dérivables sur I qui satisfont (E). De telles fonctions sont appelées *solutions* de (E). On dénote par S l'ensemble des solutions de (E). Nous disons que l'équation (E) est *normalisée* car le coefficient devant y' est 1. Nous verrons comment s'y ramener en règle générale dans le cas non normalisé, voir Section 1.6.

Definition 1.1.2. *Une condition de Cauchy pour l'équation* (E) *est une paire* $(y_0, t_0) \in \mathbb{K} \times I$*. On dit qu'une solution* y *de* (E) *vérifie la condition de Cauchy* (y_0, t_0) *si* $y(t_0) = y_0$.

Nous verrons plus loin qu'une condition de Cauchy détermine complètement une solution de (E). Par exemple, dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l'application exponentielle $t \mapsto e^t$ est l'unique solution de l'équation différentielle normalisée d'ordre 1 et de domaine $\mathbb{R}$ suivante

$$y'(t) - y(t) = 0,$$

et vérifiant la condition de Cauchy $(1, 0)$.

1.2 Equation homogène associée

Avant de résoudre l'équation (E), nous faisons un détour par l'équation plus simple suivante, appelée équation homogène associée à (E) :

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0 \tag{E_0}$$

Il s'agit toujours d'une équation linéaire d'ordre 1 et de domaine $I \subset \mathbb{R}$. Dénotons par S_0 l'ensemble des solutions de (E_0). L'ensemble S_0 à la propriété remarquable suivante :

Proposition 1.2.1. *L'ensemble S_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.*

Démonstration. La fonction nulle est solution de (E_0). Pour prouver que S_0 est un sous-espace vectoriel, il reste donc à prouver que celui-ci est stable par combinaisons linéaires : soient $y_1, y_2 \in S_0$ et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a :

$$\begin{aligned}(\lambda y_1 + \mu y_2)'(t) &= \lambda y_1'(t) + \mu y_2'(t) \\ &= -\lambda a(t)y_1(t) - \mu a(t)y_2(t) \\ &= -a(t)(\lambda y_1 + \mu y_2)(t)\end{aligned}$$

□

La proposition précédente affirme donc qu'une combinaison linéaire de solutions de (E_0) est encore une solution de (E_0). On dit que (E_0) satisfait le *principe de superposition.*

Théorème 1.2.1. *Soit $(y_0, t_0) \in \mathbb{K} \times I$. Il existe une unique solution à l'équation (E_0) qui vérifie la condition de Cauchy (y_0, t_0). Celle-ci est donnée par*

$$\forall t \in I,\ y(t) = y_0 e^{-A(t)}. \tag{1.1}$$

où $A : I \to \mathbb{K}$ est la primitive de a qui s'annule en t_0.

Démonstration. Commençons par montrer que y est solution de (E_0). Cette fonction est bien dérivable comme composée de fonctions dérivables. Sa dérivée est $y'(t) = -a(t)y_0e^{-A(t)}$ et donc on a bien $y'(t) + a(t)y(t) = 0$ et

$$y(t_0) = y_0 e^{-A(t_0)} = y_0 e^{-0} = y_0.$$

Montrons maintenant l'unicité. Soit $z \in S_0$ telle que $z(t_0) = y_0$. Considérons la fonction $Z : I \to \mathbb{K}$ définie par $Z(t) = e^{A(t)}z(t) - y_0$. On calcule :

$$\begin{aligned}Z'(t) &= a(t)e^{A(t)}z(t) + e^{A(t)}z'(t) \\ &= e^{A(t)}\left(z'(t) + a(t)z(t)\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

La troisième égalité découle du fait que z est solution de (E_0). La fonction Z, étant de dérivée nulle, est constante et comme $Z(t_0) = 0$, on obtient que $Z(t) = 0$, c'est à dire que $z(t) = y_0e^{-A(t)}$.

□

Corollaire 1.2.1. *L'ensemble S_0 des solutions de (E_0) est une droite vectorielle de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.*

Démonstration. On sait déjà par la Proposition 1.2.1 que S_0 est un sous-espace vectoriel, il reste à calculer sa dimension. Définissons une application $\Phi : S_0 \to \mathbb{K}$, $\Phi(y) = y(t_0)$. L'application Φ est linéaire et il découle du Théorème 1.2.1 que c'est une bijection. On en déduit que $\dim S_0 = 1$. □

1.3 Résolution de (E)

Dans cette partie nous décrivons l'ensemble des solutions de (E). Ceci repose sur deux idées importantes qui justifient a posteriori pourquoi nous nous sommes d'abord intéressés à l'équation homogène associée à (E).

Idée 1 : faire varier la constante. La première idée consiste à chercher une solution particulière de (E) sous la forme $z_0(t) = C(t)e^{-A(t)}$, où $C : I \to \mathbb{K}$ est une fonction à déterminer. Cette méthode s'appelle *variation de la constante*. Ce choix de terminologie s'explique ainsi : les solutions (E_0) sont de la forme $t \mapsto Ce^{-A(t)}$ d'après le Théorème 1.2.1 et ici nous remplaçons la constante C par une fonction $t \mapsto C(t)$ pour trouver une solution de (E), nous faisons donc "varier la constante". Nous verrons en TD pourquoi cette méthode marche à tous les coups. Si la fonction z_0 est solution de (E), nous devons avoir :

$$\begin{aligned} b(t) &= z_0'(t) + a(t)z_0(t) \\ &= C'(t)e^{-A(t)} - a(t)C(t)e^{-A(t)} + a(t)C(t)e^{-A(t)} \\ &= C'(t)e^{-A(t)}. \end{aligned}$$

Il faut dont que $C'(t) = b(t)e^{A(t)}$. Ceci mène au résultat suivant :

Proposition 1.3.1. *La fonction $z_0 : I \to \mathbb{K}$ définie par*

$$z_0(t) = \int_{t_0}^{t} b(s)e^{A(s)-A(t)}\, ds$$

est solution de (E) et vérifie la condition de Cauchy $(0, t_0)$.

Démonstration. La fonction z_0 est bien dérivable sur I comme produit de fonctions dérivables sur I. Ensuite, on calcule :

$$z_0'(t) = -a(t)e^{-A(t)} \int_{t_0}^{t} b(s)e^{A(s)}\, ds + b(t) = -a(t)z_0(t) + b(t). \tag{1.2}$$

Ce qui prouve que z_0 est bien solution de (E). □

Idée 2 : faire la différence de deux solutions de E. Remarquons que si y_1 et y_0 sont deux solutions de E alors $y_1 - y_0$ est solution de (E_0). Ceci permet d'obtenir le résultat suivant.

Proposition 1.3.2. *L'ensemble S des solutions de (E) est une droite affine de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ parallèle à S_0. Autrement dit, si $z_0 \in S$, on a*

$$S = z_0 + S_0. \tag{1.3}$$

Démonstration. Soit $y \in S$ une autre solution de (E). Cet ensemble n'est pas vide grâce à la proposition 1.3.1 ci-dessus. On calcule :

$$\begin{aligned} (y - z_0)'(t) + a(t)(y - z_0)(t) &= y'(t) + a(t)y(t) - \big(z_0'(t) + a(t)z_0(t)\big) \\ &= b(t) - b(t) = 0 \end{aligned}$$

Ceci prouve que $y - z_0 \in S_0$ et donc $S \subset z_0 + S_0$. L'inclusion réciproque découle d'un calcul similaire. □

En combinant le deux idées précédentes on obtient le

Théorème 1.3.1. *Soit* $(y_0, t_0) \in \mathbb{K} \times I$*. Il existe une unique solution à l'équation* (E) *qui vérifie la condition de Cauchy* (y_0, t_0)*. Celle-ci est donnée par*

$$\forall t \in I, \;\; y(t) = y_0 e^{-A(t)} + \int_{t_0}^{t} b(s) e^{A(s)-A(t)} ds. \tag{1.4}$$

où $A : I \to \mathbb{K}$ *est la primitive de* a *qui s'annule en* t_0*.*

Démonstration. Un premier calcule montre que y est bien solution de (E) et vérifie $y(t_0) = y_0$. Soit $z : I \to \mathbb{K}$ une autre telle solution. D'après la Proposition 1.3.2, $z - z_0$ est solution de (E_0) et vérifie la condition de Cauchy (y_0, t_0) donc le Théorème 1.2.1 affirme que $(z - y_0)(t) = y_0 e^{-A(t)}$. On en déduit que

$$z(t) = y_0 e^{-A(t)} + \int_{t_0}^{t} b(s) e^{A(s)-A(t)} ds = y(t),$$

Ce qui prouve l'unicité. □

Remarque. Il est intéressant de remarquer que l'intégrande dans la formule (1.4) est en fait la valeur à l'instant t de la solution de (E_0) qui vérifie la condition de Cauchy $(b(s), s)$. Si on interprète l'équation (E) comme une équation prédisant l'évolution d'une population qui se reproduit avec un taux $-a(t)$ et accueille $b(t)$ nouveaux individus à l'instant t et qui était initialement constituée de y_0 individus alors la formule (1.4) dit que la population à l'instant t est constituée des descendants des y_0 premiers individus et de la sommes des descendants des $b(s)$ individus arrivés à l'instant s pour s compris entre t_0 et t.

1.4 Guide pratique de résolution

Dans ce chapitre, nous avons décrit l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire normalisée d'ordre 1 et de domaine $I \subset \mathbb{R}$:

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t),$$

et nous avons vu qu'il existe une solution de cette équation vérifiant n'importe quelle condition de Cauchy et que cette condition détermine complètement la solution, c'est le contenu du Théorème 1.3.1. Il faut connaître la formule (1.4) et son interprétation mais il est aussi important de connaître la méthode employée pour trouver cette formule, que nous résumons ainsi :

1. On résout l'équation homogène associée
2. On trouve une solution particulière grâce à la méthode de la variation de la constante (sauf si une solution particulière évidente est connue ou facilement devinable)
3. On en déduit la forme générale des solutions comme somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène associée.

1.5 Un exemple de résolution

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On veut résoudre l'équation suivante de domaine $\mathbb{R}$:

$$y'(t) + y(t) = \frac{1}{1 + e^t} \tag{1.5}$$

et trouver la solution qui vérifie la condition de Cauchy $(\ln(4), 0)$. On commence par résoudre l'équation homogène associée :

$$y'(t) + y(t) = 0 \tag{1.6}$$

Les solution de l'équation homogène associée (1.6) sont de la forme $t \mapsto ce^{-t}$. On chercher maintenant une solution particulière de (1.5) en utilisant la méthode de la variation de la constante, c'est à dire qu'on cherche une solution de (1.5) de la forme $z_0(t) = C(t)e^{-t}$ où $t \mapsto C(t)$ est une fonction à déterminer. Si z_0 est solution de (1.5) alors on a :

$$\frac{1}{1+e^t} = z_0'(t) + z_0(t) = C'(t)e^{-t}$$

Donc il faut que $C'(t) = \frac{e^t}{1+e^t}$ et donc $C(t) = \ln(1+e^t)$ convient. Enfin on sait que la solution y de (1.5) qui vérifie la condition de Cauchy $(\ln(4), 0)$ est de la forme $z_0(t) + ce^{-t}$ où c est une constante à déterminer. On a $y(0) = \ln(2) + c = \ln(4)$ et donc $c = \ln(2)$. En conclusion, la solution de (1.5) qui vérifie la condition de Cauchy $(\ln(4), 0)$ est la fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = e^{-t}\ln(1+e^t) + \ln(2)e^{-t}.$$

1.6 Un exemple de résolution dans le cas non normalisé

Considérons maintenant le cas d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et de domaine $I \subset \mathbb{R}$ mais non normalisée, c'est à dire de la forme :

$$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t), \tag{1.7}$$

où α, β et b sont des fonctions définies sur I et α n'est pas identiquement nulle. Si α ne s'annule pas sur I et que y est solution de (1.7), alors en divisant par α dans (1.7), on obtient :

$$y'(t) + \frac{\alpha(t)}{\beta(t)}y(t) = \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}$$

et donc on se ramène à une équation normalisée en posant $a(t) = \frac{\alpha(t)}{\beta(t)}$ et $b(t) = \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}$ et puis on peut utiliser les résultats de la partie précédente pour trouver y. Dans le cas général cependant, il se peut que α passe par 0 et on ne plus diviser par α sur tout I. À la place, il faut découper I en morceaux sur lesquels α n'est pas nulle, résoudre l'équation sur chacun de ces morceaux puis voir si chacune de ces solutions *partielles* peuvent se recoller en une solution *globale*. Illustrons ceci par un exemple. Considérons l'équation différentielle suivante de domaine $\mathbb{R}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

$$(1-t)y'(t) - y(t) = t \tag{1.8}$$

Supposons que l'on a une fonction dérivable $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est solution de cette équation. La fonction $t \mapsto 1-t$ s'annule en $t = 1$. Soient $I_+ =]1, +\infty[$ et $I_- =]-\infty, 1[$. En divisant par $1-t$ sur I_+ et I_-, on voit que les restrictions de y à I_+ et à I_- sont solutions de

$$y'(t) - \frac{1}{1-t}y(t) = \frac{t}{1-t}$$

En utilisant la méthode de résolution expliquée précédemment, on montre que les solutions de ces deux équations (c'est la même équation mais sur deux domaines différents) sont de la forme $t \mapsto \frac{C+t^2}{2(1-t)}$. On a donc qu'il existe deux constantes λ et $\mu \in \mathbb{R}$ telle que

$$y(t) = \begin{cases} \frac{\lambda+t^2}{2(1-t)} & \text{si } t < 1 \\ \frac{\mu+t^2}{2(1-t)} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Comme la fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est en particulier continue en 1. Si λ est différent de -1 on a $\lim_{t\to 1^+} \frac{\lambda+t^2}{2(1-t)} = -\infty$, ce qui n'est pas possible car y est continue en 1. On a donc $\lambda = -1$. Dans ce cas, puisque $t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$, la restriction de y à I_+ coïncide avec la fonction $t \mapsto -\frac{1+t}{2}$ et $\lim_{t\to 1^+} y(t) = -1$. De même, on prouve que $\mu = 1$, que la restriction de y à I_- coïncide aussi avec $t \mapsto -\frac{1+t}{2}$ et que $\lim_{t\to 1^-} y(t) = -1$. On peut donc conclure par continuité de y que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = -\frac{1+t}{2}.$$

Réciproquement, on montre que la fonction $y : I \to \mathbb{R}$ définie par $y(t) = \frac{1+t}{2}$ est bien solution de (1.8). On a donc prouvé que l'ensemble des solutions de (1.8) est le singleton $\{t \mapsto -\frac{1+t}{2}\}$.

Remarque. Il est intéressant de remarquer qu'il n'y a qu'une seule solution à l'équation (1.8) alors qu'on sait d'après le cours que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle normalisée d'ordre 1 et de domaine $\mathbb{R}$ est une droite affine de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et est en particulier infini.

Chapitre 2

Fonctions vectorielles et exponentielle

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, soit $(E, \| \ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie et soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Dans ce chapitre, on introduit certaines propriétés de fonctions définies sur I et à valeurs dans E. Ces fonctions sont appelées *fonctions vectorielles.* Nous utilisons ensuite les fonctions vectorielles pour définir l'exponentielle d'une matrice qui sera un outil fondamental pour la résolution des systèmes différentiels que nous étudierons dans le prochain chapitre.

Objectifs :

1. Introduire les fonctions vectorielles.
2. Définir les notions de continuité, dérivabilité, dérivée, intégrale et primitive pour les fonctions vectorielles et connaître leur caractérisations en terme des fonctions coordonnées.
3. Définir la notion d'algèbre normée et d'exponentielle d'un vecteur d'une algèbre normée de dimension finie, en particulier l'exponentielle d'une matrice.
4. Connaître et savoir retrouver la formule (2.2).

2.1 Continuité, dérivabilité et intégration

On rappelle que, par définition, une suite de vecteurs $v_n \in E$ tend vers v si la quantité $\|v_n - v\|$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$. A priori, ceci dépend du choix de la norme $\| \ \|$ mais en fait il découle de l'équivalence des normes en dimension finie que ce n'est pas le cas (ceci sera abordé dans le module AL4). En particulier, toute les définitions données ci-dessous ne dépendront pas du choix de la norme $\| \ \|$.

Definition 2.1.1 (Continuité pour une fonction vectorielle)**.** *Soit $f : I \to E$ et soit $t_0 \in I$. On dit que f est continue en t_0 si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $|t_1 - t_0| < \eta$ alors $\|f(t_1) - f(t_0)\| < \varepsilon$. On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.*

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E. Si $f : I \to E$ est une application vectorielle, on peut la décomposer dans la base $\mathcal{B}$:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) e_i$$

Proposition 2.1.1. *L'application f est continue si, et seulement si, les f_i sont continues (dans le sens usuel de fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$).*

Démonstration. Voir AN4. $\square$

Exemple. Considérons la fonction suivante :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{cases} (\sin(t) + 1, -t^3) & \text{si} \quad t < 0 \\ (e^t, t^2 + 1) & \text{si} \quad t \geqslant 0 \end{cases}$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ mais elle n'est pas continue en 0 car la seconde coordonnée n'est pas continue en 0.

Definition 2.1.2 (Dérivabilité pour une fonction vectorielle)**.** *Soit $f : I \to E$ et soit $t \in I$. On dit que f est dérivable en t s'il existe $v_t \in E$ telle que pour tout suite h_n qui tend vers 0, on a :*

$$\frac{f(t_0 + h_n) - f(t_0)}{h_n} \underset{n\to\infty}{\to} v_t$$

On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I.

Il n'est pas difficile de voir que le vecteur v_t qui apparait dans la définition précédente est uniquement déterminé par la fonction f. En effet, s'il existe un autre v'_t tel que

$$\frac{f(t_0 + h_n) - f(t_0)}{h_n} \underset{n\to\infty}{\to} v'_t,$$

alors par inégalité triangulaire, on obtient :

$$\|v_t - v'_t\| \leqslant \|\frac{f(t_0 + h_n) - f(t_0)}{h_n} - v_t\| + \|\frac{f(t_0 + h_n) - f(t_0)}{h_n} - v'_t\|.$$

Comme la quantité de droite tend vers 0 et que celle de gauche de dépend pas de n, on en déduit que $v_t = v'_t$. Quand f est dérivable sur I, on dénote par $f' : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f'(t) = v_t$. Cette fonction f' est appelée *dérivée* de f.

Proposition 2.1.2. *Soit $f : I \to E$ et soient $f_1, \ldots, f_n$ les coordonnées de f dans la base $\mathcal{B}$. Alors la fonction f est dérivable en $t \in I$ si, et seulement si, les f_i sont dérivables en t (au sens usuel de fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$) et dans ce cas, on a :*

$$f'(t) = \sum_{i=1}^{n} f'_i(t) e_i.$$

Démonstration. Voir AN4. $\square$

Exemples.

1. Soit $f : I \to \mathbb{R},\ t \mapsto (\alpha(t), \beta(t))$ avec α et β deux fonctions dérivables sur I. On a alors que f est dérivable et on a :

$$\forall t \in I, f'(t) = (\alpha'(t), \beta'(t)).$$

2. Soit $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (|t|, t^2, \cos(t))$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ mais n'est pas dérivable en 0 car sa première coordonnée ne l'est pas.

3. Soit $f :]0,1[\to M_2(\mathbb{C}),\ t \mapsto \begin{bmatrix} e^t & t^2 \\ 0 & i \end{bmatrix}$. La fonction f est dérivable car ses coordonnées le sont et on a :
$$\forall t \in]0,1[,\ f'(t) = \begin{bmatrix} e^t & 2t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definition 2.1.3 (Intégrale d'une fonction vectorielle)**.** *Soit $f : I \to E$ une fonction continue et soient $a, b \in I$. On définit l'intégrale de f de la façon suivante :*

$$\int_a^b f(t)\ dt := \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_i(t)\ dt \right) e_i \tag{2.1}$$

où les $f_1, \ldots, f_n$ sont les coordonnées de f dans une base $\mathcal{B}$ de E.

Attention, il y a plusieurs implicites dans la définition précédente. Tout d'abord, on utilise la Proposition 2.1.1 qui dit que f_i est continue pour s'assurer que $\int_a^b f_i(t)\ dt$ est bien définie. Ensuite, la définition utilise une base $\mathcal{B}$ et il faudrait démontrer que la définition n'en dépend en fait pas (mais ce n'est pas difficile).

Exemples.

1. Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R},\ t \mapsto (\ln(t), 2t)$. On a $\int_1^x f(t)dt = (x\ln(x) - x, x^2 - 1)$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to M_2(\mathbb{R}),\ t \mapsto \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$. On a $\int_0^1 f(t)dt = \begin{bmatrix} e-1 & 0 \\ 0 & 1-\frac{1}{e} \end{bmatrix}$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_2[X],\ t \mapsto 1 + 3t^2X + tX^2$. On a $\int_{-1}^1 f(t)\ dt = 2 + 2X$.

Proposition 2.1.3 (Dérivée de la primitive)**.** *Soit $f : I \to E$ une fonction continue, soit $t_0 \in I$ et soit*
$$F : I \to E,\ t \mapsto \int_{t_0}^t f(s)\ ds.$$
La fonction F est dérivable sur I et on a $\forall t \in I,\ F'(t) = f(t)$. On appelle la fonction F la primitive de f qui s'annule en t_0.

Démonstration. Soient $f_1, \ldots, f_n$ les coordonnées de f dans la base $\mathcal{B}$ de E. Par définition on a pour tout $t \in I,\ F(t) = \sum_{i=1}^n F_i(t)e_i$, où
$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ F_i(t) = \left(\int_{t_0}^t f_i(s)\ ds \right).$$
Ceci veut dire que les F_i sont les fonctions coordonnées de F. De plus, F_i est la primitive de f_i (au sens usuel de fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$) donc est dérivable et $F_i'(t) = f_i(t)$. On a donc par la Proposition 2.1.2 que F est dérivable et que :
$$F'(t) = \sum_{i=1}^n F_i'(t)e_i = \sum_{i=1}^n f_i(t)e_i = f(t).$$
$\square$

Proposition 2.1.4 (Primitive de la dérivée)**.** *Soit $f : I \to E$ une fonction dérivable et soit $t_0 \in I$. On a*
$$\forall t \in I,\ \int_{t_0}^t f'(t)\ dt = f(t) - f(t_0).$$

Démonstration. Laissée en exercice, très similaire à la preuve de la Proposition 2.1.3. □

Il est intéressant de remarquer que dans le cas où $E = \mathbb{K}$, vu comme $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1, les définitions de continuité, dérivabilité, dérivée, intégrale et primitive exposées ci-dessus coïncident avec les notions usuelles de continuité, dérivabilité, dérivée, intégrale et primitive.

2.2 Algèbres normées

On rappelle qu'une $\mathbb{K}$-algèbre est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel A munie d'une loi de multiplication interne $*$ avec un élément neutre 1_A telle que :

1. $\forall a, b, c \in A,\ (a * b) * c = a * (b * c)$
2. $\forall a, b, c \in A,\ a * (b + c) = a * b + a * c$ et $(a + b) * c = a * c + b * c$
3. $\forall a, b, c \in A$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $a * (\lambda \cdot b) = \lambda \cdot (a * b) = (\lambda \cdot a) * b$

Exemples. Voici quelques exemples d'algèbres :

1. L'ensemble $\mathbb{K}$, vu comme $\mathbb{K}$-espace vectoriel, muni de la multiplication.
2. L'espace des endomorphismes $\mathcal{L}(E)$ d'un espace vectoriel E, muni de la composition et d'élément neutre l'application identité.
3. L'ensemble $M_n(\mathbb{K})$ des matrices de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ muni de la multiplication des matrices et d'élément neutre la matrice I_n.
4. L'ensemble $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ des fonctions de I dans K muni de la multiplication des fonctions et d'identité la fonction constante égale à 1.

Definition 2.2.1. *Une $\mathbb{K}$-algèbre normée est une paire $(A, \| \ \|)$ où A est une $\mathbb{K}$-algèbre et $\| \ \|$ est une norme sur A, vu en temps que $\mathbb{K}$-espace vectoriel, qui satisfait :*

$$\forall a, b \in A,\ \ \|a * b\| \leqslant \|a\|\|b\|.$$

Exemples. Voici quelques exemples d'algèbres normées :

1. L'ensemble $\mathbb{K}$ muni de la valeur absolue (on dit aussi module si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
2. L'espace $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes d'un espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$ muni de la *norme d'opérateur* $|\!|\!| \ |\!|\!|$ défini pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ par :
$$|\!|\!|f|\!|\!| = \inf\{c > 0, |\ \forall x \in E\ \ \|f(x)\| \leqslant c\|x\|\}.$$
3. L'ensemble $M_n(\mathbb{K})$ des matrices de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ muni de la norme $\| \ \|$ définie pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$ par :
$$\|A\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right\}.$$
4. L'ensemble $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{K})$ des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ muni de la *norme sup* $\| \ \|_\infty$ définie pour tout $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{K})$ par :
$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

2.3 Exponentielle

Dans toute cette section, on fixe une $\mathbb{K}$-algèbre normée $(A, \| \ \|)$ de dimension finie (en temps que $\mathbb{K}$-espace vectoriel). Dans la liste des 4 exemples d'algèbres normées donnée à la fin de la section précédente, toutes sont de dimension finie sauf la dernière. Si $a \in A$, on dénote par a^n le produit $a * a * \cdots * a$. Ceci ne dépend pas de l'ordre dans lequel on procède puisque $*$ est associative. Par extension, on dénote aussi $a^0 = 1_A$. On rappelle que si $z \in \mathbb{K}$, on a :

$$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

La formule précédente dit en particulier que pour définir l'exponentielle d'un élément $z \in \mathbb{K}$, il suffit de savoir faire des sommes, des produits et prendre des limites. On peut donc essayer de faire la même chose dans une algèbre normée ! Le lemme suivant dit que cela est toujours possible.

Lemme 2.3.1. *Pour tout $a \in A$, la série $\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$ est convergente. Autrement dit, il existe $\ell \in A$ tel que :*

$$\| \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} - \ell \| \underset{n \to +\infty}{\to} 0$$

La preuve du Lemme 2.3.1 n'est pas particulièrement compliquée et pourra être abordée en TD. Ceci permet la définition fondamentale suivante qui servira à partir du prochain chapitre :

Definition 2.3.1. *L'exponentielle d'un élément $a \in A$ est*

$$e^a = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!}.$$

Si $A = \mathbb{K}$, on retrouve la définition usuelle de l'exponentielle sur $\mathbb{K}$. Le cas le plus important dans le cadre de ce cours est le cas $A = M_n(\mathbb{K})$. L'exponentielle d'une matrice sera un outil essentiel dans la résolution des systèmes différentiels scalaires.

Exemples.

1. Soit $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$. Si $k \geqslant 0$, on a $A^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & 0 \\ 0 & \mu^k \end{bmatrix}$ d'où :

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mu^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^\mu \end{bmatrix}.$$

2. Soit $B = \begin{bmatrix} 0 & z & z^2 \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{K})$. On a $B^3 = 0$, d'où on déduit :

$$e^B = I_3 + B + B^2 = \begin{bmatrix} 1 & z & 2z^2 \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Proposition 2.3.1. *Soient $a, b \in A$ tels que $a * b = b * a$. On a l'égalité :*

$$e^{a+b} = e^a * e^b.$$

La preuve de la Proposition 2.3.1 sera abordée en TD.

Corollaire 2.3.1. *L'exponentielle d'un élément $a \in A$ est inversible et son inverse est e^{-a}.*

Démonstration. D'après 2.3.1, on a $e^{-a} * e^{a} = e^{0} = 1_A$ et de même $e^{a} * e^{-a} = 1_A$. $\square$

2.4 Un calcul élémentaire de dérivée

A partir de maintenant, on se place dans le cas où notre algèbre normée est l'algèbre des matrices $M_n(K)$ munie de la norme d'algèbre $\| \ \|$ définie pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$ par :

$$\|A\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right\}.$$

Proposition 2.4.1. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $t_0 \in I$. L'application $\Phi : I \to M_n(\mathbb{K})$ définie par $\Phi(t) = e^{(t_0 - t)A}$ est dérivable et on a :*

$$\forall t \in I, \ \Phi'(t) = -e^{(t_0-t)A} A = -A e^{(t_0-t)A}. \tag{2.2}$$

Démonstration. On commence par prouver que Φ est dérivable en t_0 de dérivée $-A$. Soit h_n une suite qui tend vers 0 et calculons :

$$\Phi(t_0 + h_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-h_n A)^k}{k!} = I_n - h_n A + h_n^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{-h_n^{k-2}(-A)^k}{k!}.$$

Soit n_0 assez grand tel que $|h_n| < 1$ pour tout $n > n_0$. Un tel rang existe puisque on a supposé que h_n tend vers 0. Comme $\Phi(t_0) = I_n$, on a alors :

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\Phi(t_0 + h_n) - \Phi(t_0)}{h_n} + A \right\| &\leqslant |h_n| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|h_n|^{k-2} \|A\|^k}{k!} \\
&\leqslant |h_n| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} \\
&\leqslant |h_n| e^{\|A\|} \underset{n \to +\infty}{\to} 0.
\end{aligned}$$

Ceci prouve bien que Φ est dérivable en 0 et que sa dérivée en t_0 est $-A$. Soit maintenant $t \in I$ et soit h_n qui tend vers 0. En utilisant la Proposition 2.3.1, on obtient :

$$\frac{\Phi(t + h_n) - \Phi(t)}{h_n} = e^{(t-t_0)A} \left(\frac{\Phi(t_0 + h_n) - \Phi(t_0)}{h_n} \right) \underset{n \to \infty}{\to} e^{(t-t_0)A} \Phi'(t_0),$$

On a utilisé la sous-multiplicativité de la norme pour la calcul de la limite ce-dessus. ceci prouve que Φ est dérivable en t et que $\Phi'(t) = -e^{(t-t_0)A} A$. En utilisant la définition de l'exponentielle, on peut voir par ailleurs que A commute avec $e^{\tau A}$ pour n'importe quel $\tau \in \mathbb{R}$. Ceci prouve qu'on a aussi $\Phi'(t) = -A e^{(t-t_0)A}$ $\square$

Chapitre 3

Systèmes différentiels

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans ce chapitre on introduit et étudie les systèmes différentiels à coefficients dans $\mathbb{K}$, qui sont des analogues multidimensionnels des équations différentielles linéaires d'ordre 1.

Objectifs

1. Reconnaître un système différentiel
2. Savoir décrire la structure de l'ensemble des solutions
3. Connaître la formule de Duhamel (3.5)
4. Savoir résoudre en pratique les systèmes différentiels à coefficients constants

3.1 Définitions

Definition 3.1.1. *Un système différentiels linéaires de domaine $I \subset \mathbb{R}$ et de rang n est une famille d'équations de la forme*

$$\begin{cases} y_1'(t) + a_{1,1}(t)y_1(t) + \cdots + a_{1,n}(t)y_n(t) = & b_1(t) \\ \vdots & \\ y_n'(t) + a_{n,1}(t)y_1(t) + \cdots + a_{n,n}(t)y_n(t) = & b_n(t) \end{cases} \tag{3.1}$$

où les $(a_{i,j} : I \to \mathbb{R})_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$ et les $(b_i : I \to \mathbb{R})_{i\in\{1,\dots,n\}}$ sont des fonctions définies et continues sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

On insiste sur le fait que le système (3.1) est constitué de n équations. Résoudre ce système, c'est trouver une fonctions $t \mapsto (y_1(t), \dots, y_n(t))$ à valeur dans $\mathbb{K}^n$, définie et dérivables sur I (au sens de fonction vectorielle comme dans le chapitre 2) dont les coordonnés satisfont les équations (3.1). Une telle fonction est appelée solution de (3.1). On dénote par S l'ensemble des solutions. On a donc $S \subset \mathcal{F}(I, \mathbb{K}^n)$. Nous verrons plus loin des systèmes d'équations non normalisés, c'est à dire quand il y a des fonctions non identiquement nulles devant les y_i' à la place de 1. Il est important de remarquer qu'un système d'équations différentielles linéaires normalisées d'ordre 1 et de rang 1 est simplement une équation différentielle linéaire d'ordre 1, comme vu au chapitre 1. Le système (3.1) peut se réécrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1,1}(t) & \cdots & a_{1,n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}(t) & \cdots & a_{n,n}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

ou encore :

$$Y'(t) + A(t)Y(t) = B(t). \tag{3.3}$$

Definition 3.1.2. *Une condition de Cauchy pour l'équation (3.1) est une paire $(Y_0, t_0) \in \mathbb{K}^n \times I$. On dit qu'une solution $t \mapsto Y(t)$ de l'équation (3.1) satisfait la condition de Cauchy (Y_0, t_0) si $Y(t_0) = Y_0$.*

Exemple. Soit $A(t) = \begin{bmatrix} 2t - t^2 & t - t^2 \\ 2t^2 - 2t & 2t^2 - t \end{bmatrix}$ et $B(t) = \begin{bmatrix} 3t^2 - 2t \\ t^4 - 3t^2 + 4t \end{bmatrix}$. Alors la fonction

$$Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{bmatrix} t^3 - t^2 \\ 2t^2 - t^3 \end{bmatrix}$$

est solution du système différentiel d'ordre 1, rang 2 et domaine $\mathbb{R}$ suivant :

$$Y'(t) + A(t)Y(t) = B(t)$$

et vérifie la condition de Cauchy $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, 0\right)$.

3.2 Système différentiel homogène associé

Dans cette partie, on s'intéresse au *système différentiel linéaire homogène associé à* (3.1) :

$$Y'(t) + A(t)Y(t) = 0, \tag{3.4}$$

et on dénote par S_0 l'ensemble des fonctions $Y : I \to \mathbb{K}^n$ qui sont dérivables sur I et vérifient (3.4).

Proposition 3.2.1. *L'ensemble S_0 des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K}^n)$.*

Démonstration. La fonction nulle $t \mapsto 0_{\mathbb{K}^n}$ est clairement solution de (3.4). Montrons maintenant que l'ensemble des solutions est stable par combinaisons linéaires. Soient $Y_1, Y_2 : I \to \mathbb{K}^n$ deux solutions de (3.4) et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors la fonction $t \mapsto \lambda Y_1(t) + \mu Y_2(t)$ est une fonction vectorielle dérivable et on a :

$$\begin{aligned} (\lambda Y_1(t) + \mu Y_2(t))' &= \lambda Y_1'(t) + \mu Y_2'(t) \\ &= -\lambda A(t)Y_1(t) - \mu A(t)Y_2(t) \\ &= -A(t)\left(\lambda Y_1(t) + \mu Y_2(t)\right) \end{aligned}$$

Ce qui prouve que $t \mapsto \lambda Y_1(t) + \mu Y_2(t)$ est encore solution de (3.4). □

Contrairement au cas du rang 1, on ne connaît pas de formule explicite pour résoudre l'équation (3.1) mais on dispose néanmoins du résultat important suivant qui affirme l'existence et l'unicité de solution étant donnée une condition de Cauchy :

Théorème 3.2.1 (Cauchy-Lipschitz)**.** *Soit $(Y_0, t_0) \in \mathbb{K}^n \times I$. Il existe une unique solution au système (3.4) vérifiant la condition de Cauchy (Y_0, t_0).*

La preuve du Théorème de Cauchy-Lipschitz ci-dessus n'est pas au programme. Elle repose sur un théorème général d'existence de point fixe dans les espaces de Banach pour les application contractantes. La preuve n'est pas particulièrement compliquée mais elle utilise des outils dont ne disposons pas à ce stade. Par contre, nous verrons en TD que si une solution existe, elle est unique.

Corollaire 3.2.1. *L'ensemble S_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K}^n)$ de dimension n.*

Démonstration. Soit $t_0 \in I$. Définissons l'application $\Phi : S_0 \to \mathbb{K}^n, Y \mapsto Y(t_0)$. Cette application est linéaire et il découle du Théorème de Cauchy-Lipschitz que Φ est une bijection, ce qui prouve que S_0 a dimension n. □

Soit $P : I^2 \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ définie l'application telle que $P(s, t, Y)$ est la valeur au temps t de la solution de (3.4)d qui vérifie la condition Cauchy (Y, s). Par définition, la fonction vectorielle $t \mapsto P(s, t, Y)$ est donc dérivable et sa dérivée est l'application $t \mapsto -A(t)P(s, t, Y)$. La lettre P est choisie pour *propagateur.*

Proposition 3.2.2. *Soit $t, s \in I$. L'application $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $Y \mapsto P(s, t, Y)$ est une application linéaire inversible, d'inverse $Z \mapsto P(t, s, Z)$ (les rôles de t et s ont été échangés).*

Démonstration. Soient $Y_1, Y_2 \in \mathbb{K}^n$ et soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$. Par définition, $P(s, t, \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2)$ est la valeur à l'instant t de la solution de (3.4) qui vaut $\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2$ en s. Mais $t \mapsto P(s, t, Y_i)$ est par définition la solution de (3.4) qui vaut Y_i en s. D'après la proposition 3.2.1, $t \mapsto \lambda_1 P(s, t, Y_1) + \lambda_2 P(s, t, Y_2)$ est aussi solution de (3.4) et vaut $\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2$ en s. Par unicité d'une telle solution, on a donc :

$$P(s, t, \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2) = \lambda_1 P(s, t, Y_1) + \lambda_2 P(s, t, Y_2),$$

ce qui prouve que $Y \mapsto P(s, t, Y)$ est linéaire.

Ensuite, soit $Y \in \mathbb{K}^n$ et soit $Z = P(s, t, Y)$. Par définition $P(t, s, Z)$ est la valeur au temps s de la solution de (3.4) qui vaut Z au temps t. Comme $u \mapsto P(s, u, Y)$ est la solution de (3.4) qui vaut Z au temps t, on a donc $P(t, s, Z) = P(s, s, Y) = Y$. Ceci prouve bien que l'inverse de $Y \mapsto P(s, t, Y)$ est l'application $Z \mapsto P(t, s, Z)$. □

3.3 Description de l'ensemble des solutions de (3.1)

Le théorème suivant donne une description des solutions de (3.1) en fonction des solutions de (3.1). La formule (3.5) ci-dessous est importante et est connue sous le nom de *Formule de Duhamel.*

Théorème 3.3.1. *Soit $(Y_0, t_0) \in \mathbb{K}^n \times I$. Il existe une unique solution $Z : I \to \mathbb{K}^n$ du système différentiel (3.1) qui vérifie la condition de Cauchy (Y_0, t_0). De plus on a :*

$$\forall t \in I, \quad Z(t) = P(t_0, t, Y_0) + \int_{t_0}^{t} P(s, t, B(s))\, ds. \tag{3.5}$$

Démonstration. On commence par montrer que la fonction $t \mapsto Z(t)$ de l'énoncé est solution de l'équation (3.1). Il faut d'abord montrer qu'elle est dérivable. Pour cela, dénotons par Z_0 l'application vectorielle $t \mapsto \int_{t_0}^{t} P(s, t, B(s))\, ds$ de sorte que $Z(t) = P(t_0, t, Y_0) + Z_0(t)$. Comme la fonction vectorielle $t \mapsto P(t_0, t, Y_0)$ est par définition solution de (3.4), elle est dérivable. Ainsi, pour montrer que Z est dérivable, il suffit de montrer que Z_0 est dérivable. Notez que ceci ne découle pas de la proposition 2.1.3 puisque la variable t apparaît aussi dans l'intégrande. Pour tout $s \in I$, la fonction vectorielle $t \mapsto P(s, t, B(s))$ est dérivable et sa dérivée est la fonction $t \mapsto -A(t)P(s, t, B(s))$. Par définition de la dérivée d'une fonction vectorielle, on a alors :

$$P(s, t + h, B(s)) = P(s, t, B(s)) - hA(t)P(s, t, B(s)) + o(h).$$

Soit $t \in I$ et soit $h \in \mathbb{R}$ assez petit tel que $t + h \in I$. On a :

$$\begin{aligned}
Z_0(t+h) &= \int_{t_0}^{t+h} P(s,t+h,B(s))\ ds \\
&= \int_{t_0}^{t+h} P(s,t,B(s)) - hA(t)P(s,t,B(s)) + o(h)\ ds \\
&= Z_0(t) - hA(t)Z_0(t) + \int_{t}^{t+h} P(s,t,B(s))\ ds \\
&\qquad - hA(t)\int_{t_0}^{t} P(s,t,B(s))\ ds + o(h).
\end{aligned}$$

Remarquons ensuite que quand s est compris entre t et $t+h$ avec h suffisamment petit, $P(s,t,B(s))$ est par continuité presque égale à $P(t,t,B(t)) = B(t)$. On a donc que $\int_t^{t+h} P(s,t,B(s))\ ds = hB(t)+o(h)$ et $\int_t^{t+h} hA(t)P(s,t,B(s))\ ds = h^2A(t)B(t)+o(h)$. On a donc montré que

$$Z_0(t+h) = Z_0(t) + h(B(t) - A(t)Z_0(t)) + o(h),$$

ce qui veut dire que Z_0 est dérivable et

$$Z_0'(t) = B(t) - A(t)Z_0(t).$$

La fonction $Z : t \mapsto P(t_0,t,Y_0) + Z_0(t)$ est alors dérivable et

$$Z'(t) = -A(t)P(t_0,t,Y_0) + Z_0'(t) = -A(t)Z(t) + B(t),$$

ce qui prouve que $t \mapsto Z(t)$ est bien solution de (3.1). De plus, $Z(t_0) = P(t_0,t_0,Y_0)+0 = Y_0$, donc Z vérifie aussi la condition de Cauchy (Y_0,t_0).

Pour compléter la preuve du théorème, il reste à prouver l'unicité, c'est à dire à prouver que Z est la seule solution de l'équation (3.1) qui vérifie la condition de Cauchy (Y_0,t_0). Si $t \mapsto Y(t)$ est une autre telle solution, la fonction vectorielle $t \mapsto Z(t) - Y(t)$ est solution de (3.4) et vérifie la condition de Cauchy $(0_{\mathbb{K}^n}, t_0)$. Comme la fonction nulle $t \mapsto 0_{\mathbb{K}^n}$ est aussi solution de (3.1) et vérifie la condition de Cauchy $(0_{\mathbb{K}^n}, t_0)$ et qu'il y a exactement une seule telle solution d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, on en déduit que $Z - Y = 0$, ce qui permet de conclure.

□

Proposition 3.3.1. *L'ensemble S des solutions de (3.1) est un sous-espace affine de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K}^n)$ parallèle à S_0. Autrement dit, si Z_0 est une solution particulière de (3.1), alors on a :*

$$S = Z_0 + S_0$$

Démonstration. Soit Z_0 une solution particulière de (3.1). Une telle solution existe d'après le Théorème 3.3.1. Soit $t \mapsto Z(t)$ une autre solution. La fonction $t \mapsto Z(t) - Z_0(t)$ est solution de (3.4) donc $Z - Z_0 \in S_0$. Comme Z est arbitraire, ceci prouve que $S \subset Z_0 + S_0$. L'inclusion réciproque découle d'un calcul direct. □

3.4 Systèmes différentiels scalaires

Après avoir étudié les systèmes différentiels d'un point de vue théorique, nous nous concentrons maintenant sur les systèmes différentiels scalaires, c'est à dire ceux pour lesquels la matrice $A(t)$ est constante :

Definition 3.4.1. *Un système différentiel scalaire est une équation de la forme :*

$$Y'(t) + AY(t) = B(t) \tag{3.6}$$

L'avantage de ces systèmes différentiels scalaires est qu'on peut donner une formule explicite pour les solution en utilisant les exponentielles de matrices. Nous rappelons du chapitre 2 que si $A \in M_n(K)$, nous définissons son exponentielle par la formule

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Proposition 3.4.1. *Soit $(Y_0, t_0) \in \mathbb{K}^n \times I$. La fonction $Y : t \mapsto e^{(t_0-t)A}Y_0$ est la solution du système différentiel homogène associé à (3.6) qui vérifie la condition de Cauchy (Y_0, t_0).*

Démonstration. Montrons que la fonction vectorielle $t \mapsto Y(t)$ est dérivable et calculons sa dérivée. D'après la proposition 2.4.1, la fonction $t \mapsto e^{(t_0-t)A}$ est elle-même dérivable et sa dérivée est $t \mapsto -Ae^{(t_0-t)A}$. Ceci veut dire par définition que pour tout $t \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ est assez petit tel que $t + h \in I$, on a :

$$\Phi(t + h) = \Phi(t) - hA\Phi(t) + o(h).$$

Comme on a $Y(t) = \Phi(t)Y_0$, on en déduit en multipliant par Y_0 que :

$$Y(t + h) = Y(t) - hAY(t) + o(h).$$

Ceci prouve que $t \mapsto Y(t)$ est dérivable et que sa dérivée est $-AY(t)$. Autrement dit, $t \mapsto Y(t)$ est bien solution du système homogène associé et comme $Y(t_0) = e^0 Y_0 = Id_n Y_0 = Y_0$, ceci permet de conclure. □

La proposition précédente montre donc que dans le cas où $t \mapsto A(t)$ est constante et égale à une matrice A, alors $P(s, t, Y_0)$ (comme défini dans le paragraphe précédent) vaut $e^{(t_0-t)}Y_0$. On obtient alors le résultat important suivant qui donne une solution explicite aux systèmes différentiels scalaires.

Théorème 3.4.1. *Soit $(Y_0, t_0) \in \mathbb{K}^n \times I$. La solution de l'équation (3.6) qui vérifie la condition de Cauchy (Y_0, t_0) est donnée par :*

$$Y(t) = e^{(t_0-t)A}Y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(s-t)A}B(s)\ ds. \tag{3.7}$$

Démonstration. C'est la formule de Duhamel (3.5) en remplaçant $P(s, t, \cdot)$ par $e^{(t_0-t)A}$. □

Remarque importante En factorisant par e^{-tA} dans l'équation précédente, on voit que les solutions de (3.6) sont de la forme $Y(t) = e^{-tA}C(t)$. Ceci justifie que dans la pratique, on chercher à trouver des solutions de (3.6) sous cette forme. C'est la méthode de la variation de la constante en rang supérieur.

3.5 Guide pratique de résolution

Dans ce chapitre, nous avons étudié les systèmes différentiels linéaires de la forme :

$$Y'(t) + A(t)Y(t) = B(t)$$

et nous avons montré qu'il existe une unique solution à ce système différentiel vérifiant une condition de Cauchy donnée. Nous avons donné la formule de Duhamel (3.5) qui permet d'exprimer les solutions de (3.1) en fonction des solutions du système homogène associé (3.4) et enfin nous avons insisté sur le fait que nous ne connaissons pas de formule simple permettant d'exprimer les solutions de ce système différentiel homogène. Il existe néanmoins un cas intéressant où une telle formule existe grâce à l'exponentielle des matrices, c'est le cas où $t \mapsto A(t)$ est constante, que nous avons appelé *système différentiels scalaire*, voir (3.7). Nous insistons néanmoins sur le fait qu'il n'est pas toujours évident de calculer l'exponentielle d'une matrice et la théorie de la réduction des endomorphismes est un allié précieux pour cela. En effet, celle-ci affirme qu'il existe une matrice inversible P et une matrice M telle que $PAP^{-1} = M$ et telle que l'exponentielle de M est beaucoup plus simple à calculer que celle de A. Comme nous savons que $\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}$, nous avons alors que $\exp(A) = P^{-1}\exp(M)P$, ce qui nous permet en pratique de trouver l'exponentielle de A. Nous avons vu en TD des exemples où M est nilpotente (c'est à dire $M^k = 0$ pour un $k > 0$) et des exemples où M est diagonale. La *Réduction de Jordan*, qui est un des aboutissement de la réduction des endomorphismes montre qu'en général on peut toujours se ramener à une combinaisons de ces deux cas.

Il n'est pas attendu de vous de savoir résoudre le système (3.1) en général mais vous devez connaître la méthode de résolution dans le cas scalaire. Voici les trois étapes pour trouver la solution $Y : I \to \mathbb{K}^n$ du système différentiel **scalaire** (3.6) vérifiant une condition de Cauchy (Y_0, t_0) :

1. On commence par trouver une solution de l'équation homogène associée (en utilisant la proposition 3.4.1)
2. On cherche une solution particulière $Z_0 : I \to \mathbb{K}$ du système différentielle sous la forme $Z_0(t) = e^{(t_0-t)A}C(t)$ où $t \mapsto C(t)$ est une fonction à valeur dans $\mathbb{K}^n$ à déterminer en injectant dans le système différentiel.
3. On exprimer la solution Y comme la somme d'une solution du système différentiel homogène associée et de la solution particulière trouvée dans le point précédent.

Une autre possibilité est de remplacer les étapes 2. et 3. par l'utilisation de la formule de Duhamel (3.7). Nous mettons enfin une dernière approche en avant, qui sera le plus souvent celle utilisée en TD. Si nous disposons de matrices P et M comme ci-dessus (avec M diagonale ou triangulaire par exemple) on peut :

1. Montrer que $Z : t \mapsto PY(t) = PB(t)$ est solution de $Z'(t) + MZ(t)$ qui est souvent une équation plus simple à résoudre
2. Résoudre cette nouvelle équation
3. Revenir à Y en multipliant Z par P^{-1}.

C'est à vous de choisir la méthode que vous préférez. Idéalement, il faut savoir toutes les faire ! Mettons ceci en application :

3.6 Exemple de résolution

Considérons le système différentiel scalaire de domaine $I \subset \mathbb{R}$, de rang 3 et à coefficients dans $\mathbb{R}$ suivant :

$$Y'(t) + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} Y(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ 0 \\ e^{-3t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

et cherchons la solution qui vérifie la condition de Cauchy $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, 0 \right)$. Nous suivons la méthode en trois étapes expliquée dans la partie précédente :

1. Commençons par trouver les solutions du système homogène associé en utilisant la proposition 3.4.1. Il nous faut donc calculer e^{-tA}. Calculons la matrice $M = PAP^{-1}$ où

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Un calcul montre que $M = M_1 + M_2$ avec

$$M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ et } M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Comme M_1 et M_2 commutent, on a par la proposition 2.3.1 l'égalité $e^{-tM} = e^{-tM_1}e^{-tM_2}$. De plus, on calcule que

$$e^{-tM_1} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & -te^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } e^{-tM_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix},$$

d'où on déduit que :

$$e^{-tM} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & -te^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

et donc :

$$e^{-tA} = P^{-1}e^{-tM}P = \begin{bmatrix} e^{-2t} & -te^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ e^{-3t} - e^{-2t} & te^{-2t} & e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

Les solutions du système homogène associé sont donc, d'après la proposition 3.4.1 de la forme :

$$t \mapsto e^{-tA} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xe^{-2t} - yte^{-2t} \\ ye^{-2t} \\ (x+z)e^{-3t} + (yt - x)e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

2. Nous appliquons maintenant la méthode de la variation de la constante, c'est à dire que nous cherchons une solution particulière $Z_0 : I \to \mathbb{K}^n$ du système différentiel sous la forme $Z_0(t) = e^{-tA}C(t)$ où $t \mapsto C(t)$ est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ à déterminer. Si Z_0 est solution du système différentiel, on doit avoir

$$B(t) = Z_0'(t) + AZ_0(t) = -Ae^{-tA}C(t) + e^{-tA}C'(t) + AZ_0(t) = e^{-tA}C'(t)$$

et donc en multipliant par l'inverse de la matrice e^{-tA}, qui est e^{tA} d'après la proposition 2.3.1, on obtient :

$$C'(t) = e^{tA}B(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

On peut donc choisir $C(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et on obtient alors :

$$Z_0(t) = e^{-tA}C(t) = \begin{bmatrix} te^{-2t} \\ 0 \\ te^{-3t} - te^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Réciproquement, il faut vérifier que Z_0 ainsi définie est bien solution de notre système différentiel.

3. Enfin pour trouver la solution Z du système différentiel qui vérifie la condition de Cauchy $(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, 0)$, on écrit que Z est de la forme

$$Z(t) = e^{-tA}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + Z_0(t)$$

et comme e^{-tA} vaut I_3 en $t = 0$ et que $Z_0(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, on obtient :

$$Z(0) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

ce qui implique $x = 1, y = 0$ et $z = -1$. Finalement, on a prouvé que la solution du système différentiel qui satisfait la condition de Cauchy $(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, 0)$ est la fonction Z, définie par

$$Z(t) = e^{-tA}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} te^{-2t} \\ 0 \\ te^{-3t} - te^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} + te^{-2t} \\ 0 \\ te^{-3t} - te^{-2t} - e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Chapitre 4

Équations différentielles linéaires d'ordre supérieur

Objectifs :

1. Reconnaître une équation différentielle linéaire (EDL) d'ordre supérieur.
2. Savoir transformer une EDL d'ordre supérieur en un système différentiel.
3. Savoir résoudre les EDL scalaires d'ordre 2.

4.1 Définitions

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Definition 4.1.1. *Une équation différentielle linéaire normalisée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ et de domaine $I \subset \mathbb{R}$ est une équation de la forme*

$$y^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) y^{(k)}(t) = b(t) \tag{4.1}$$

où les a_i et b sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$, définies et continues sur l'intervalle I.

Dans la définition précédente, $y^{(k)}$ dénote la dérivée d'ordre k de la fonction y. Résoudre l'équation (4.1), c'est trouver l'ensemble des fonctions $y : I \to \mathbb{K}$ qui sont n fois dérivables et qui satisfont l'équation (4.1). De telles fonctions sont appelées *solutions* et on dénote par S l'ensemble des solutions. L'ordre d'une EDL fait référence au plus grand ordre de la dérivée qui apparaît dans cette équation. Nous disons que l'équation est *normalisée* car le coefficient devant $y^{(n)}$ est 1, comme dans le cas des EDL d'ordre 1. Comme pour les EDL d'ordre 1 et les systèmes différentiels, nous avons une notion de condition de Cauchy.

Definition 4.1.2. *Une condition de Cauchy pour l'équation (4.1) est une paire $(Y_0, t_0) \in \mathbb{K}^n \times I$. On dit qu'une solution y de (4.1) vérifie la condition de Cauchy (Y_0, t_0) si $y^{(k)}(t_0) = y_k$ où $Y_0 = (y_0, \cdots, y_{n-1})$.*

4.2 Un principe de transfert

Ici, nous expliquons un principe de transfert qui permet de transformer la résolution de (4.1) en la résolution d'un système différentiel et donc d'utiliser tous les outils des chapitres précédents pour la résolution des EDL d'ordre supérieur. On définit :

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & -1 \\ a_0(t) & & & a_{n-1}(t) \end{bmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$$

et on considère le système différentiel suivant :

$$Z'(t) + A(t)Z(t) = B(t). \tag{4.2}$$

L'idée remarquable est de constater que si $t \mapsto Y(t)$ est solution de (4.2) alors sa première coordonnée est solution de (4.1) et réciproquement si y est solution alors $t \mapsto Y(t)$ est solution de (4.2) avec

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}.$$

C'est cette idée que nous appellerons dans ce cous *principe de transfert*. Attention cependant au fait qu'il ne s'agit pas d'une terminologie standard.

Exemple. Si une fonction y deux fois dérivable est solution de l'EDL d'ordre 2 suivante :

$$y''(t) + ky(t) = F_0 \sin(\omega t)$$

alors $Y(t) = (y(t), y'(t))$ est solution du système différentiel suivant :

$$Y'(t) + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ k & 0 \end{bmatrix} Y(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ F_0 \sin(\omega t) \end{bmatrix}.$$

Réciproquement, si $t \mapsto (y_0(t), y_1(t))$ est solution du système ci-dessus alors $y_1(t) = y_0'(t)$ et y_0 est solution de l'EDL d'ordre 2 ci-dessus.

4.3 Résolution de l'équation (4.1)

Maintenant que nous avons fait le lien entre les EDL d'ordre n et les systèmes différentiels, nous pouvons utiliser les résultats du chapitre précédent pour obtenir le résultat important suivant :

Théorème 4.3.1. *Soit $(Y_0, t_0) \in \mathbb{K}^n \times I$. Il existe une unique solution $y : I \to \mathbb{K}$ de (4.1) qui vérifie la condition de Cauchy (Y_0, t_0).*

Démonstration. D'après le théorème 3.3.1, il existe une unique solution $Y : I \to \mathbb{K}^n$ au système différentiel (4.2) vérifiant la condition de Cauchy (Y_0, t_0) et écrivons $Y_0(t) = (y_0(t), \cdots, y_{n-1}(t))$. Par définition de $A(t)$, on a alors que $y_k'(t) = y_{k+1}(t)$ et donc par une récurrence immédiate, ceci montre que y_0 est k fois dérivable et on a $y_0^{(k)}(t) = y_k(t)$. La dernière ligne de l'équation (4.2) se récrit alors

$$y_0^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) y_0^{(k)}(t) = b(t),$$

ce qui veut dire que y_0 est solution de l'équation (4.1). De plus si $Y(t_0) = Y_0$, a alors que $y_0^{(k)}(t_0) = y_k$ pour tout $k \in \{0, \cdots, n-1\}$ donc y_0 vérifie la condition de Cauchy (Y_0, t_0).

Pour l'unicité, supposons que $y, z : I \to \mathbb{K}$ sont deux solutions de (4.1) vérifiant la condition de Cauchy (Y_0, t_0). On définit

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \text{ et } Z(t) = \begin{pmatrix} z(t) \\ z'(t) \\ \vdots \\ z^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

D'après l'idée évoquée au début du chapitre permettant de transformer une EDL en un système différentiel, on a que Y et Z sont toutes les deux solutions de (4.2) et vérifient par définition la condition de Cauchy (Y_0, t_0). On déduit de la partie "unicité" du théorème 3.3.1 que $Z = Y$ et en particulier $y = z$ en identifiant les premières coordonnées. □

L'équation homogène associée à (4.1) est l'EDL d'ordre n et de domaine $I \subset \mathbb{R}$ suivante :

$$y^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) y^{(k)}(t) = 0, \tag{4.3}$$

c'est à dire que l'on remplace simplement b par 0 dans (4.1). On dénote par S_0 l'ensemble des solutions de cette équation homogène associée. On a la description suivante de S et S_0, analogue au cas d'ordre 1 vu au premier chapitre.

Proposition 4.3.1. *L'ensemble S_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K}^n)$ de dimension n et l'ensemble S est un sous-espace affine de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K}^n)$ parallèle à S_0, c'est à dire que si $z_0 \in S_0$ est une solution particulière, alors on a*

$$S = z_0 + S_0$$

Démonstration. La preuve est laissée en exercice (il faut savoir le faire) ! □

4.4 Equations différentielles d'ordre 2 scalaires

Comme c'était le cas pour les systèmes différentiels, nous ne connaissons pas de formule explicite donnant les solutions des équations différentielles linéaires d'ordre n quand $n > 1$ (dans le cas $n = 1$, nous connaissons les formules, c'est l'objet du chapitre 1). Dans cette section nous nous concentrons sur le cas scalaire (c'est à dire le cas où les $a_i : I \to \mathbb{K}$ sont des fonctions constantes) pour lequel nous disposons de telles formules. En fait, pour simplifier d'avantage on supposera même que $n = 2$, c'est à dire que l'on s'intéresse à l'équation suivante :

$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = b(t), \tag{4.4}$$

où $p, q \in \mathbb{C}$. Pour résoudre cette équation, on va suivre une méthode qui commence à devenir habituelle à ce stade. On commence par résoudre l'équation homogène associée :

$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = 0 \tag{4.5}$$

Pour cela, on introduit le polynôme caractéristique $P = X^2 + pX + q$ de l'équation, et on dénote par $\Delta = p^2 - 4q$ son discriminant. Attention ! Δ est a priori un nombre complexe, puisque les coefficients de P sont eux même complexes. Nous allons voir que nous pouvons exprimer les solutions de (4.5) en fonction des racines du polynôme P. L'observation fondamentale pour le reste de cette section est la suivante : si r est une racine de P alors $z_0 : t \mapsto e^{tr}$ est une solution de (4.5). En effet, on a bien

$$z_0''(t) + pz_0'(t) + qz_0(t) = r^2e^{tr} + pre^{tr} + qe^{tr} = e^{tr}P(r) = 0.$$

Remarquons que pour faire fonctionner l'idée précédente, il faut que l'on dispose d'une racine de P. Commençons donc par le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ dans lequel on peut peut toujours trouver une racine de P.

Théorème 4.4.1. *On suppose que* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1. *Si* $\Delta \neq 0$, *alors le polynôme* P *possède deux racines distinctes* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ *et dans ce cas les fonctions* $t \mapsto e^{\lambda t}$ *et* $t \mapsto e^{\mu t}$ *forment une base de l'espace des solutions de* (4.5).
2. *Si* $\Delta = 0$, *alors le polynôme* P *possède une unique racine double* $r \in \mathbb{C}$ *et dans ce cas* $t \mapsto e^{rt}$ *et* $t \mapsto te^{rt}$ *forment une base de l'espace des solutions de* (4.5).

Démonstration. On sait d'après la proposition 4.3.1 que l'ensemble des solutions de (4.5) est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. De plus, un simple calcul montre que les deux fonctions données sont solutions de l'équation (4.5) et qu'elles sont linéairement indépendantes comme vecteurs de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Comme une famille de 2 vecteurs linéairement indépendants dans un espace vectoriel de dimension 2 est une base, on peut conlcure. □

Supposons maintenant que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Si $\Delta \geqslant 0$, le polynôme P possède toujours une racine λ et $t \mapsto e^{\lambda t}$ est toujours solution mais si $\Delta < 0$, le polynôme P n'a pas de racine réelle et $t \mapsto e^{\lambda t}$ n'est pas à valeur dans $\mathbb{R}$... Mais dans ce cas, si on écrit $\lambda = x + iy$, on a que $x - iy$ est aussi une racine de P et donc $t \mapsto e^{t(x-iy)}$ est encore solution. Comme une combinaison linéaire de solutions est encore une solution, on voit que $t \mapsto \frac{1}{2}(e^{t(x+iy)} + e^{t(x-iy)})$ est aussi solution. Or, en utilisant les formules trigonométriques, on voit que cette fonction coïncide avec $t \mapsto e^{tx}\cos(yt)$, qui est à valeurs dans $\mathbb{R}$! On aurait aussi pu faire la combinaison linéaire $\frac{1}{2i}(e^{t(x+iy)} - e^{t(x-iy)})$ pour obtenir $t \mapsto e^{tx}\sin(ty)$. C'est cette idée qui est implémentée dans le résultat suivant.

Théorème 4.4.2. *On suppose maintenant* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et* $P \in \mathbb{R}[X]$.

1. *Si* $\Delta \neq 0$, *alors le polynôme* P *possède deux racines distinctes* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *et dans ce cas les fonctions* $t \mapsto e^{\lambda t}$ *et* $t \mapsto e^{\mu t}$ *forment une base de l'espace des solutions de* (4.5).
2. *Si* $\Delta = 0$, *alors le polynôme* P *possède une unique racine double* $r \in \mathbb{C}$ *et dans ce cas* $t \mapsto e^{rt}$ *et* $t \mapsto te^{rt}$ *forment une base de l'espace des solutions de* (4.5).
3. *Si* $\Delta < 0$ *alors le polynôme* P *possède deux racines complexes conjuguées* $x + iy$ *et* $x - iy$ *et dans ce cas, les fonctions* $t \mapsto e^{tx}\cos(yt)$ *et* $t \mapsto e^{tx}\sin(yt)$ *forment une base de l'ensemble des solutions.*

Exemple. Soit $\omega > 0$. Trouvons les solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$ de l'équation suivante :

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = 0$$

Le discriminant du polynôme caractéristique est $-4\omega^2$. Ainsi, d'après le cas 3 du théorème 4.4.2, on sait que les solutions de cette équation sont de la forme

$$y(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) \text{ avec } a, b \in \mathbb{R}.$$

Cherchons maintenant la solution qui satisfait la condition de Cauchy $((y_0, y_1), t_0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. On doit avoir

$$\left\{\begin{array}{rl} a\cos(\omega t_0) + b\sin(\omega t_0) = & y_0 \\ -a\omega\sin(\omega t_0) + b\omega\cos(\omega t_0) = & y_1 \end{array}\right. \tag{4.6}$$

ce qui est équivalent au système

$$A\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_0\\y_1\end{bmatrix},\ \text{avec } A=\begin{bmatrix}\cos(\omega t_0) & \sin(\omega t_0)\\ -\omega\sin(\omega t_0) & \omega\cos(\omega t_0)\end{bmatrix}$$

Comme $\det(A)=\omega$ est non nul, A est inversible et on peut calculer la valeur de a et b en inversant le système et on trouve :

$$\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}y_0\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_0\cos(\omega t_0)-\frac{y_1}{\omega}\sin(\omega t_0)\\ \frac{y_1}{\omega}\cos(\omega t_0)+y_0\sin(\omega t_0)\end{bmatrix}.$$

Ainsi, la solution qui vérifie la condition de Cauchy $(y_0, y_1), t_0)$ est :

$$y(t)=\Big(y_0\cos(\omega t_0)-\frac{y_1}{\omega}\sin(\omega t_0)\Big)\cos(\omega t)+\Big(\frac{y_1}{\omega}\cos(\omega t_0)+y_0\sin(\omega t_0)\Big)\sin(\omega t).$$

On revient maintenant à l'équation avec second membre (4.4). D'après la proposition 4.3.1, on sait que si l'on dispose d'une solution particulière $z_0 : I\to\mathbb{C}$, alors les solutions de (4.4) s'écrivent comme la somme de z_0 et d'une solution de l'équation homogène. Il nous faut donc un moyen de trouver une solution particulière, et là encore on dispose d'une déclinaison de la méthode de la variation de la constante. Celle-ci prend la forme suivante : supposons que l'on dispose d'une base de solution $\{y_1, y_2\}$ de S_0, ce qui veut dire que toute solution de l'équation homogène associée s'écrit de la forme $t\mapsto c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$. Alors la méthode de la variation de la constante consiste à chercher une solution particulière z_0 sous la forme

$$z_0(t)=c_1(t)y_1(t)+c_2(t)y_2(t)$$

où c_1 et c_2 sont telles que :

$$\left\{\begin{array}{rc} c_1'(t)y_1(t)+c_2'(t)y_2(t)= & 0\\ c_1'(t)y_1'(t)+c_2'(t)y_2'(t)= & b(t)\end{array}\right. \tag{4.7}$$

En effet, en vertu du principe de transfert mentionné ci-dessus, introduisons la système différentiel suivant :

$$Y'(t)+\begin{bmatrix}0 & -1\\ q & p\end{bmatrix}Y(t)=\begin{bmatrix}0\\ b(t)\end{bmatrix}. \tag{4.8}$$

D'après le corollaire 3.2.1, l'ensemble des solutions du système homogène associé à (4.8) est de dimension 2. Soient $Y_1, Y_2 : I\to\mathbb{K}^2$ une base de cet espace et voyons à quelles conditions sur $c_1 : I\to\mathbb{K}$ et $c_2 : I\to\mathbb{K}$ la fonction Z_0 définie par :

$$Z_0(t)=c_1(t)Y_1(t)+c_2(t)Y_2(y)$$

est solution du système différentiel (4.2). On a :

$$Z_0'(t)=c_1'(t)Y_1(t)+c_1(t)Y_1(t)+c_2'(t)Y_2(t)+c_2(t)Y_2'(t)$$

donc en injectant dans (4.2), on voit que Z_0 est solution si, et seulement si,

$$c_1'(t)Y_1(t)+c_2'(t)Y_2(t)=B(t)$$

Or, d'après le principe de transfert, si Z_0 est solution de (4.8), Z_0 est de la forme

$$Z(t)=\begin{pmatrix}z_0(t)\\ z_0'(t)\end{pmatrix}$$

où z_0 est solution de (4.4). En identifiant les coordonnées, ceci indique que l'on peut bien chercher une solution particulière de (4.4) sous la forme indiquée. C'est la méthode de la variation de la constante pour les EDL d'ordre 2.

4.5 Guide pratique de résolution des EDL d'ordre 2 scalaires

Pour résumer, la résolution de l'équation (4.4) se fait en trois étapes :

1. On cherche une base de solutions $\{y_1, y_2\}$ de l'équation homogène associée grâce aux théorèmes 4.4.1 ou 4.4.2 selon que l'on travaille sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$.
2. On cherche une solution particulière z_0 de l'équation, soit en cherchant une solution évidente, soit avec la méthode de la variation de la constante pour les EDL d'ordre 2, c'est à dire en cherchant z_0 sous la forme $z_0(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$ où $c_1, c_2 : I \to \mathbb{K}$ vérifient

$$\begin{cases} c_1'(t)y_1(t) + c_2'(t)y_2(t) = & 0 \\ c_1'(t)y_1'(t) + c_2'(t)y_2'(t) = & b(t) \end{cases} \tag{4.9}$$

3. On exprime les solutions de (4.4) sous la forme d'une solution de l'équation homogène associée et de la solution particulière z_0.

Chapitre 5

Quelques exemples d'équations différentielles se ramenant à une équation différentielle linéaire

Objectifs :

1. Introduire les équations différentielles (ED) d'ordre 1 en toute généralité.
2. Étudier quelques familles de telles ED dont l'étude se ramène à celle d'une EDL.
3. Connaître l'astuce permettant de se ramener à une EDL pour chacune de ces familles.

5.1 Définitions

Definition 5.1.1. *Une équation différentielle d'odre 1 et de domaine $I \subset \mathbb{R}$ est une équation de la forme*

$$F(y'(t), y(t), t) = 0 \tag{5.1}$$

où $F : \mathbb{K}^2 \times I \to \mathbb{K}$ est une fonction continue.

Résoudre l'équation (5.1) c'est trouver l'ensemble des paires (J, y) où $J \subset I$ est un sous-intervalle ouvert de I et $y : J \to \mathbb{K}$ est une fonction dérivable telle que $F(y'(t), y(t), t) = 0$ pour tout $t \in J$. Une telle paire est appelé *solution*. Dans les chapitres précédents, on demandait que les solutions soient définies sur tout I car cela n'était pas restrictif mais nous allons voir que cela devient trop contraignant lorsque l'on sort du monde des équations différentielles linéaires, c'est pourquoi on autorise les solutions à n'être définies que sur des sous-intervalles ouverts de I.

Exemples.

1. Soient $a, b : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues. Si $F : \mathbb{K}^2 \times I \to \mathbb{K}$ est la fonction définie par

   $$F(u, v, t) = u + a(t)v - b(t)$$

   alors l'équation différentielle (5.1) n'est rien d'autre qu'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

2. On considère l'équation différentielle suivante :

$$y' = 3(y^2)^{1/3}$$

Si $K < 0$, on définit $f_K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f_K(t) = \begin{cases} (t-K)^3 & \text{si} \quad t \leqslant K \\ 0 & \text{si} \quad K < t \leqslant 0 \\ t^3 & \text{si} \quad t \geqslant 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

alors pour tout $K < 0$, la paire$(\mathbb{R}, f_K)$ est une solution de l'équation différentielle. Il est important de remarquer que les f_K sont toutes nulles en 0 et donc qu'une solution n'est plus déterminée par une condition de Cauchy ! Cela reste néanmoins vrai sous certaines hypothèses de régularité sur la fonctions F, mais cela ne sera abordé qu'en troisième année !

5.2 Équation de Bernoulli

Definition 5.2.1. *Une équation différentielle de Bernoulli de degré $r \in \mathbb{N} - \{0\}$ et de domaine $I \subset \mathbb{R}$ est une équation différentielle de la forme*

$$y'(t) + a(t)y(t) + b(t)y^r(t) = 0 \tag{5.3}$$

où $a, b : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions définies et continues sur I.

Une équation de Bernoulli est donc une équation différentielle comme dans (5.1) avec $F(u, v, t) = u + a(t)v + b(t)v^r$. La fonction nulle sur n'importe quel sous-intervalle de I en est clairement une solution. Réciproquement, si (J, y) est une solution telle que $y(t) \neq 0$ pour tout $t \in J$, on peut utiliser l'astuce suivante : il suffit de définir $z = \frac{1}{y^{r-1}}$, puis on calcule :

$$z'(t) = (1-r)\frac{y'(t)}{y^r(t)} = (r-1)(\frac{a(t)}{y^{r-1}(t)} + c(t)) = (r-1)a(t)z(t) + (r-1)b(t)$$

et donc z est solution de l'EDL d'ordre 1 et de domaine I suivante :

$$z'(t) + (1-r)a(t)z(t) = (r-1)b(t).$$

On peut ensuite résoudre cette EDL en utilisant les techniques du premier chapitre puis retrouver ensuite y sur J.

Exemple. Considérons l'équation différentielle suivante :

$$ty'(t) - y(t) - 3y^3(t)t = 0 \tag{5.4}$$

Trouver les solutions (J, y) dans les cas où $J =]0, +\infty[$, $]-\infty, 0[$ ou $\mathbb{R}$.

5.3 Equation de Riccatti

Definition 5.3.1. *Une équation différentielle de Riccatti de domaine $I \subset \mathbb{R}$ est une équation différentielle de la forme*

$$y'(t) + a(t)y^2(t) + b(t)y(t) + c(t) = 0 \tag{5.5}$$

où $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions définies et continues sur I.

On peut remarquer que si $c = 0$ dans (5.5), on retrouve on équation de Bernoulli d'ordre 2. En règle générale, on peut toujours se ramener à une équation de Bernoulli d'ordre 2 dès lors que l'on connaît une solution particulière de (5.5). En effet, si (J_0, z_0) est une solution particulière de (5.5) et si (y, J) est une autre solution avec $J \subset J_0$, alors $z = y - z_0$ vérifient l'équation différentielle de Bernoulli de degré 2 suivante :

$$z'(t) + \alpha(t)z(t) + \beta(t)z^2(t) = 0,$$

où $\alpha(t) = 2a(t)z_0(t) + b(t)$ et $\beta(t) = a(t)$. On peut donc utiliser le changement de variables mentionné dans la section précédente pour trouver z.

5.4 Équation à variables séparées

Definition 5.4.1. *Une équation différentielle à variables séparées de domaine $I \subset \mathbb{R}$ est une équation différentielle de la forme*

$$f(y(t))y'(t) = g(t) \tag{5.6}$$

où $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions définies et continues sur I.

Une équation à variables séparées est donc une équation différentielle comme dans (5.6) avec $F(u, v, t) = uf(v) - g(t)$, d'où l'appellation *variables séparées* car les *variables spatiales* u et v sont séparées de la *variable temporelle* t. Cette fois ci, l'astuce consiste à choisir des primitives F et G de f et g. Ainsi, si (J, y) est une solution de (5.6), on a

$$(F \circ y - G)'(t) = f(y(t))y'(t) - g(t) = 0.$$

Ceci permet de conclure que $F(y(t)) = G(t) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$ et on peut retrouver y si F est inversible ou au moins obtenir des informations quantitatives sur y, comme on le verra en exercice.