EDP paraboliques & flot de Ricci pour les surfaces

Fixons $(\mathcal{M}, g_0)$ une variété Riemannienne $\mathcal{C}^\infty$ compacte de dimension $d = 2$.

On associe une forme volume, une divergence, un laplacien, ...

L'équation qui nous intéresse est

$$\partial_t w = \frac{2}{d} \operatorname{div}\left(\frac{1}{w} \nabla w\right) + 2(K w - K_{g_0})$$

Alors $g(t) = w\, g_0$ résoudra l'équation du flot de Ricci normalisé

et, en particulier,

$$\partial_t w = 2(K - K_g)\, w .$$

I) Espaces fonctionnels

a) Espaces de Sobolev

Dans cette partie on gardera la dimension d libre ≥ 2.

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq \infty$, on introduit une norme $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\mathcal{M}_{g_0})}$ qui quantifie sur les fonctions que la fonction possède des dérivées jusqu'à l'ordre k dans $L^p(\mathcal{M})$. On considère l'espace complet naturellement associé $W^{k,p}(\mathcal{M})$.

Quand $1 \leq p < \infty$, $W^{k,p}(\mathcal{M})$ est le complété de $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ pour $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$.

$W^{0,\infty} = L^\infty$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $W^{k,\infty}$ c'est l'espace des fonctions $\mathcal{C}^{k-1}$ dont les dérivées k-ièmes sont lipschitz.

On peut étendre la définition au cas $W^{s,p}$, $s \in \mathbb{R}_+$, $1 \leq p \leq \infty$.

Si $s = k + \alpha$, $0 < \alpha < 1$, être dans $W^{s,p}$ c'est être dans $W^{k,p}$ avec des dérivées k-ièmes v telles que

$$\left\| (x,y) \mapsto \frac{|v(x) - v(y)|}{\min(\{\ell_0, d(x,y)\})^\alpha} \right\|_{L^p\left(\frac{d\mathrm{vol}(x)\, d\mathrm{vol}(y)}{\min(\{\ell_0, d_g(x,y)\})^d} \right)} < +\infty$$

où $\ell_0 > 0$ est fixé petit.

Pour $p = \infty$, espaces de Hölder $W^{s,\infty} = \mathcal{C}^{k,\alpha}$ $\quad s = k + \alpha$, $0 < \alpha < 1$

$k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ $\quad W^{k,\infty} = \mathcal{C}^{k-1,1}$

Pour $p = 2$, on note $H^s = W^{s,2}$, c'est un Hilbert.

La définition est telle que si on convolue une fonction fixe en un point à l'échelle spatiale λ, alors dans la limite $\lambda \to 0$ la norme $\| \cdot \|_{W^{s,p}}$ « explose » comme $\lambda^{-(s - \frac{d}{p})}$

1 dérivée $\sim \frac{1}{\lambda}$; volume $\sim \lambda^d$; $\frac{1}{p}$ encode l'importance donnée au volume.

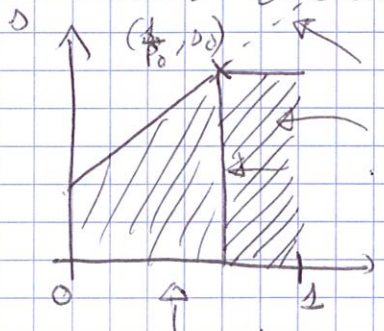
b) Injections de Sobolev

On déduit du fait qu'en un certain sens en moyennant les développements de Taylor on peut écrire toute fonction comme une moyenne de la fonction plus une moyenne de dérivées de degré fixé.

Cela permet de montrer des liens entre les normes et les espaces. Ils sont correctement prédits pour les indices de régularité $s - \frac{d}{p}$ (sauf dans des cas de bord où quelque part on plonge via $x \mapsto \frac{1}{x}$ comme un $\ln$ plutôt qu'une fonction $\mathcal{C}^{k}$).

Comme on est en volume fini, on peut aussi toujours descendre p gratuitement, $\|u\|_{W^{s,p}} \leq C \|u\|_{W^{s,q}}$ si $p \leq q$. (Hölder) car $\mathbb{1} \in L^1 \cap L^\infty = \bigcap_{1 \leq r \leq \infty} L^r$.

Par définition, $\|u\|_{W^{s,p}} \leq C \|u\|_{W^{s',p}}$ si $s \leq s'$.



zône des $(\frac{1}{p}, s)$ tels que $\|\cdot\|_{W^{s_0,p_0}}$ contrôle $\|\cdot\|_{W^{s,p}}$.

(dépend : $d \geq 2$)

« Th »

$s_\theta - \frac{d}{p} = (1-\theta)(s_0 - \frac{d}{p_0}) + \theta(s_1 - \frac{d}{p_1})$

$s \leq (1-\theta) s_0 + \theta s_1$

$\|u\|_{W^{s,p}} \leq C \|u\|^{1-\theta}_{W^{s_0,p_0}} \|u\|^{\theta}_{W^{s_1,p_1}}$

sauf dans les cas suivants :

- $(s,p) \in \mathbb{N} \times \{\infty\}$ $\quad s_0 - \frac{d}{p_0} = s_1 - \frac{d}{p_1}$ et $s < \max(\{s_0, s_1\})$.
- on prend $(s_0, s_1) = (\max(\{s_0,s_1\}), \min(\{s_0,s_1\}))$, $s_0 > s_1$, $(s_0, p_0) \in \mathbb{N} \times \{1\}$, $s_\theta = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$ i.e. $\frac{1}{p_0} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ et $s_0 - \frac{1}{p_0} \leq s_1 - \frac{1}{p_1}$.

c) Régularité elliptique (version L^2, très facile).

Si u L^2 et Δu L^2, alors $u \in H^2$.

$C(\|u\|_{L^2} + \|\Delta u\|_{L^2}) \leq \|u\|_{H^2} \leq C'(\|u\|_{L^2} + \|\Delta u\|_{L^2})$. l.o.t.

Dem. $\|\Delta u\|^2_{L^2} = \|\operatorname{div}(\nabla u)\|^2_{L^2} = \|\nabla^2 u\|^2_{L^2} +$ termes d'ordre inférieur

avec $|\text{l.o.t.}| \leq \|u\|_{H^1} \|u\|_{H^2} \leq \|u\|^{1/2}_{L^2} \|u\|^{3/2}_{H^2}$

$\leq \frac{1}{4} \frac{1}{\varepsilon^3} \|u\|^2_{L^2} + \frac{3}{4} \varepsilon \|u\|^2_{H^2}$

$$\|\nabla^2 u\|_{L^2}^2 \leq \|\Delta u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2 .$$

Rq : Également vrai que $u \in W^{s,p}$ et $\Delta u \in W^{s,p}$ $\Leftrightarrow u \in W^{s+2,p}$ si $(s,p) \notin \mathbb{N} \times \{1, \infty\}$. Plus dur.

II Flot de Ricci en dimension 2 ½

a) Du linéaire au non linéaire

Choix : • argument par estimation d'énergie, d'où espaces de type L^2.
• montée en ordre avec des dérivées en temps

Estimation de contraction pour se faire la main :

$$\partial_t w_j - \operatorname{div}\left(\frac{1}{w_j} \nabla w_j\right) = 2(K w_j - K_{g(0)}) \qquad j = 1, 2$$

$$\partial_t (w_1 - w_2) - \operatorname{div}\left(\frac{1}{w_1} \nabla (w_1 - w_2)\right) = \operatorname{div}\left(\left(\frac{1}{w_1} - \frac{1}{w_2}\right) \nabla w_2\right) + 2K (w_1 - w_2)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_1 - w_2\|_{L^2}^2 + \int \frac{1}{w_1} \|\nabla (w_1 - w_2)\|^2 \leq \int \langle \nabla (w_1 - w_2), \left(\frac{1}{w_1} - \frac{1}{w_2}\right) \nabla w_2 \rangle + \|w_1 - w_2\|_{L^2}^2$$

($\nabla(w_1 - w_2)$: L^2)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_1 - w_2\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \int \frac{1}{w_1} \|\nabla (w_1 - w_2)\|^2 \leq \|w_1 - w_2\|_{L^2}^2 \left(\left\| \frac{1}{\sqrt{w_1}} \frac{1}{w_2} \nabla w_2 \right\|_{L^\infty}^2 + 1 \right)$$

Suffit à donner l'unicité sous contrôle $L^\infty_t W^{1,\infty}_{x}$.

Pour atteindre $W^{1,\infty}_x$ on va travailler dans H^s_x avec $s > \frac{d}{2} + 1 = 2$. Comme l'équation échange une dérivée en temps contre 2 dérivées en espace, cela amène à essayer de contrôler $w, \partial_t w, \dots, \partial_t^k w$ dans L^2 avec $2k > 2$. $k = 2$: O.K., correspond à $w_{ini} \in H^4$.

Th. : • Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $w_{ini} \in H^{2k}$ tel que $\frac{1}{w_{ini}} \in L^\infty$, $w_{ini} > 0$, il existe une unique solution maximale w définie sur $I_{w_{ini}}$ (intervalle ouvert dans $\mathbb{R}_+$ contenant 0) partant de w_{ini} en $t=0$ et vérifiant

$$w \in \bigcap_{\ell=0}^{k} \mathcal{C}^\ell_t H^{2(k-\ell)}_x, \quad w > 0, \quad \frac{1}{w} \in \mathcal{C}^0_{t,x}.$$

• Si $\sup I_{w_{ini}} < +\infty$ alors

$$\| K_{g(t)} \|_{L^1_t(L^\infty_x)} = +\infty.$$

• w est $\mathcal{C}^\infty$ sur $(I_{w_{ini}} \cap]0, +\infty[) \times \mathcal{H}$.

Étapes de la démonstration :

1. Existence et unicité locale par contraction.

Si $\| w_{ini} \|_{H^{2k}} \leq M$, $\| \frac{1}{w_{ini}} \|_{L^\infty} \leq M$,

alors pour tout $0 \leq T \leq T_M$, T_M assez petit l'application qui à w_{aux} associe w solution de

$$\partial_t w - \operatorname{div}\left(\frac{1}{w_{aux}} \nabla w \right) = 2(K_w - K_{g(t)})$$
$$w(0,\cdot) = w_{ini}$$

est bien définie et strictement contractante sur

$$X_{T,M} = \left\{ w \in \bigcap_{\ell=0}^{k} \mathcal{C}^\ell([0,T]; H^{2(k-\ell)}_x), \ \frac{1}{w} \in L^\infty, w>0, \right.$$
$$\left. \| w \|_{L^\infty_t H^{2k}} \leq 2M, \ \| \frac{1}{w} \|_{L^\infty} \leq 2M \right.$$
$$\left. \| \partial_t^\ell w \|_{L^\infty_t H^{2(k-\ell)}} \leq C_M^\ell \quad 1 \leq \ell \leq k \right\}.$$

dans lui-même, avec C_M assez grand.

Estimations similaires à ce qui précède. Il suffit de contrôler $(w, \dots, \partial_t^k w)$ et d'utiliser l'équation.

2. Solutions maximales (à la Cauchy-Lipschitz) avec critère d'explosion $\lim_{t \to \sup I_{w_{ini}}} \left(\| w(t,\cdot) \|_{H^{2k}} + \| \frac{1}{w_{ini}}(t,\cdot) \|_{L^\infty} \right) = +\infty$

3. Régularisation.

Principe sur l'équation $\partial_t w - \Delta w = 0$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_{L^2}^2 + \|\nabla w\|_{L^2}^2 &= 0 \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w\|_{L^2}^2 + \|\Delta w\|_{L^2}^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|w\|_{L^2}^2 + t\,\|\nabla w\|_{L^2}^2\right) + 2t\,\|\Delta w\|_{L^2}^2 = 0$$

$$\|\nabla w(t,\cdot)\|_{L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}\|w_{ini}\|_{L^2}.$$

1 dérivée en moins $\sim \frac{1}{\sqrt{t}}$ (temps court).

4. Critère d'explosion sur la courbure.

Comme $\partial_t w = 2(K - K_g)w$, on a :

$$\|(w, \tfrac{1}{w}, \partial_t w)\|_{L^\infty([0,T]\times\partial\gamma)} < +\infty \iff \|K_g\|_{L^1([0,T],L^\infty)} < +\infty$$

Il suffit de montrer que si $\|(w, \frac{1}{w}, \partial_t w)\|_{L^\infty_{t,x}} < +\infty$

alors $\|w\|_{L^\infty_t(H^4_x)} < +\infty$.

Directement avec l'équation on récupère $\|w\|_{L^\infty_t(H^2_x)} < +\infty$

et $\|(w, \partial_t w)\|_{L^2_t H^1_x}$ ce qui implique $\|w\|_{L^2_t H^3_x} < +\infty$.

Il suffit alors de montrer que $\|\partial_t^2 w\|_{L^\infty_t L^2_x} < +\infty$.

On $\partial_t(\partial_t^2 w) - \operatorname{div}\left(\frac{1}{w}\nabla\partial_t^2 w\right) = \operatorname{div}\left(\left[\partial_t^2, \frac{1}{w}\right]\nabla w\right) + K\partial_t^2 w$

avec $\left\|\left[\partial_t^2, \frac{1}{w}\right]\nabla w\right\|_{L^2} \leq \|\partial_t^2 w\|_{L^2_x}\underbrace{\|\nabla w\|_{L^\infty_x}}_{\in L^2_t \text{ car } w \in L^2_t H^3_x} + \|\partial_t w\|_{L^\infty_x}\underbrace{\|\nabla\partial_t w\|_{L^2_x}}_{\in L^2_t}$

O.K.

b) Problème linéaire

Éléments de justifications pour la résolution de :

$$\partial_t w - \operatorname{div}\left(\frac{1}{w^{aux}} \nabla w\right) = 2(K w - K_{g(0)}).$$

Schéma d'Euler implicite : $t_n = n\Delta t$

W_n approchant $w(t_n, \cdot)$. Dépendance en Δt implicite.

$$\frac{W_{n+1} - W_n}{\Delta t} - \operatorname{div}\left(\frac{1}{w^{aux}(t_{n+1}, \cdot)} \nabla W_{n+1}\right) = 2(K W_{n+1} - K_{g(0)})$$

i.e.

$$W_{n+1} - \Delta t \operatorname{div}\left(\frac{1}{w^{aux}(t_n, \cdot)} \nabla W_{n+1}\right) - 2K\Delta t W_{n+1} = W_n - \Delta t K_{g(0)}$$

Résolution par le th. de Riesz sur H^1 :

$$B(W_{n+1}, \cdot) = \ell$$

où $B(W, w) = \int \left[W^2 (1 - 2K\Delta t) + \frac{\Delta t}{w^{aux}(t_n, \cdot)} |\nabla W|^2 \right]$

et $\ell(w) = \int W (W_n - 2\Delta t K_{g(0)})$.

Borne uniforme : $\|W_n\|_{L^2} \leq e^{2\|K\|_{L^\infty} t_n} \|W_{in}\|_{L^2} + 2 t_n e^{2\|K\|_{L^\infty} t_n} \|K_{g(0)}\|_{L^2}$.

Il faut montrer des bornes uniformes avec des dérivées en espace et utiliser ces bornes supplémentaires pour montrer la CV.

Rq : À un moment donné, on invoque que pour des applications linéaires : (bornes uniformes + CV ~~sur~~ en ensemble dense) $\Rightarrow$ CV partout.

III] Principe du maximum