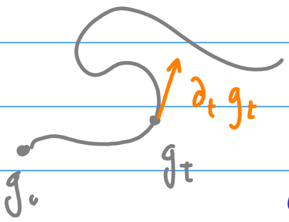
Flot de Ricci GT 4/04/2025

I Flot de Ricci (Rappels)

Soit (M, g_0) une variété riemannienne.
On va chercher à déformer la métrique pour la simplifier.
Pour cela on considère l'équation (pb de Cauchy)

$$\boxed{\partial_t g_t = -2\, \mathrm{Ric}_{g_t}} \qquad g_{t=0} = g_0$$

Qu'est-ce que ça veut dire ? Quel sens donner à $\partial_t g_t$?
$t \longmapsto g_t$ est un chemin dans l'ensemble des métriques riemanniennes. Est-ce que cet ensemble est une variété diff ?



Si oui quel est son espace tangent ?

En fait c'est facile car on peut fixer un point $x \in M$.
g_x est une forme bilinéaire symétrique sur $T_x M$ définie positive. $\mathcal{L}^2_{S^+}(T_x M)$
C'est un ouvert dans l'espace vectoriel $\mathcal{L}^2_S(T_x M)$ des formes bilinéaires symétriques
$t \longmapsto g_t(x)$ est donc un chemin dans un ouvert d'un evn $\rightarrow$ on peut dériver
$\partial_t g_t(x) \in \mathcal{L}^2_S(T_x M)$

(Donc en ajoutant la topologie $C^\infty(M)$ on obtient un chemin $t \mapsto g_t$ dans un ouvert des (?) "2-tenseurs symétriques sur M")

<u>Rappel 2</u> Ric_g ? On a vu (exposé de Juan) le tenseur de courbure R

qui est une grosse bête à 4 pattes

$$R(X, Y, Z, T)$$

$$R : T_pM \times T_pM \times T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$$

et une bête un peu plus sympathique, avec seulement 2 pattes (bipède ?) $Ric(X,Y) = \sum_{i=1} R(E_i, X, Y, E_i)$

où (E_i) est une base ON.

Ric est précisément un 2-tenseur symétrique :

$$\forall x \in M \quad Ric_x \in \mathcal{L}_s^2(T_xM)$$

Donc l'équation $\partial_t g_t = -2 Ric_{g_t}$ $g_{t=0} = g_0$ est bien définie sur tout (M, g_0)

Sachant que Ric_g fait intervenir les dérivées spatiales de g on a une EDP, localement à valeurs dans

$$\mathcal{L}_s^2(T_xM) \simeq \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$$

<u>Rappel 3 : $n=2$</u> $\mathcal{L}_s^2(\mathbb{R}^2) \simeq \mathbb{R}^3$

mais en fait on a mieux : on a vu (Juan) que Ric_g est <u>colinéaire</u> à g

$$\forall x \in M \qquad Ric(g)_x = K_x \cdot g_x$$

où $K : M \to \mathbb{R}$ est la courbure sectionnelle (scalaire)

Rappel $K : G_2(TM) \longrightarrow \mathbb{R}$ 2-Grassmannienne mais en dim 2 $G_2(TM) = M$

L'équation qui nous intéresse est donc

$$\circledast \quad \begin{cases} \partial_t g_t = -2K_{g_t}\, g_t \\ g_{t=0} = g_0 \end{cases}$$

<u>et</u> g_t doit être dans l'ouvert des métriques riemanniennes

Rappel 4 : métriques conformes. On a vu (E. Loretan) que <u>si</u> g_t est solution de $\circledast$

on a $\partial_t g_t = 2 f_t \cdot g_t$ avec $f_t = -K_{g_t}$

$f_t : M \to \mathbb{R}$

Donc $\forall x \in M \quad \partial_t g_{t_x} = 2 f_t(x) \cdot g_{t_x}$ EDO

$$\Rightarrow \quad \boxed{g_t = e^{2\varphi_t} \cdot g_0 \quad \text{avec} \quad \varphi_t = \int_0^t f_s \, ds}$$

Évidemment ça ne <u>résout pas</u> $\circledast$ puisque φ_t dépend de g_t, on a juste une nouvelle équation implicite (sans dérivée temporelle).

Mais au moins on sait que tous les g_t sont nécessairement <u>conformes</u> à g_0 : on peut réduire l'équation $\circledast$ en une équation <u>scalaire</u> (cf. plus loin)

Avant ça faisons quelques exemples.

II Exemples

① Solutions à courbure constante.

Si $K_{g_0} = \text{cst} = K_0$ peut-on trouver une sol g_t avec $K_{g_t} = \text{cst} = K_t \in \mathbb{R}$?

Nécessairement $\varphi_t = \int_0^t -K_s\, ds = \text{cst}\ (t)$

D'autre part on sait que si $g = e^{2\varphi} g_0$ (Florentin) alors

$$K_g = e^{-2\varphi}\left(K_{g_0} - \Delta_{g_0}\varphi\right)$$

Donc $K_t = e^{-2\varphi_t}(K_0 - 0)$ car $d\varphi_t = 0$

Donc $\partial_t K_t = +2K_t^2$ (Ricatti ?)

$$\partial_t\left(\frac{1}{K_t}\right) = -2 \qquad \frac{1}{K_t} - \frac{1}{K_0} = -2t$$

$$K_t = \frac{1}{\frac{1}{K_0} - 2t} = \frac{K_0}{1 - 2K_0 t} = e^{-2\varphi} K_0$$

Conclusion $g_t = e^{2\varphi} g_0 = (1 - 2K_0 t)\, g_0$

On vérifie qu'on a bien $\partial_t g_t = -2K_0 g_0$

$$= -\frac{2K_0}{1 - 2K_0 t} g_t = -2K_t g_t$$

Prop Les solutions de Ricci "à courbures constantes" sont les $g_t = (1 - 2K_0 t)\, g_0$ ... $t \in$?

Mais attention : est-ce que ce sont bien des métriques ?
Quel intervalle pour t ? (contenant $t=0$)

g_t est une métrique tant que $(1-2K_0 t) > 0$
On doit donc discuter en fonction du signe de la courbure K_0

(a) Courbure nulle $K_0 = 0 \Rightarrow g_t = g_0$
(b) Courbure > 0 $K_0 > 0$ $t \in]-\infty, \frac{1}{2K_0}[$
lorsque $t \to \frac{1}{2K_0}$ la métrique $\to 0$
"la variété converge vers un point"
(c) Courbure < 0 $K_0 < 0$ $t \in]\frac{1}{2K_0}, +\infty[$

(2) Exemple 2 : "le soliton cigare"

Dans $(\mathbb{R}^2, g_{can})$ (non compact !) $g_{can} = dx^2 + dy^2$
On considère la métrique $g_t = \dfrac{1}{e^{4t} + r^2} g_{can}$
$= h(t,r)\, g_{can}$ $\quad h(t,r) = \dfrac{1}{e^{4t}+r^2}$

On a $\partial_t g_t = \partial_t h \, g_{can}$.

et par la formule de la courbure pour les métriques conformes $h = e^{2\varphi}$ $\quad \varphi = \frac{1}{2}\ln h$
$$K_t = e^{-2\varphi}(K_{can} - \Delta_{can}\varphi)$$
$$= -e^{-2\varphi}\Delta_{can}\varphi \quad \left(= \frac{-1}{h_t}\Delta_{can}\varphi\right)$$
on veut
$$\partial_t g_t = -2K_t g_t = -2K_t h_t g_{can}$$
donc on voudrait mq $\partial_t h_t = -2K_t h_t$

Soit $\underline{\partial_t h_t = 2\Delta_{can}\varphi_t}$?

<u>Interlude</u> Laplacien en coordonnées polaires
ou : comment retrouver la formule de la façon la plus absurde... (ou pas ! en tout cas avec les repères mobiles)

Soit (e_1, e_2) une BON (pour g_{can}) de TM
et (η_1, η_2) la base duale
On a la formule (cf Florentin)

$$\Delta f \, \eta_1 \wedge \eta_2 = d * d f$$

Prenons $e_1 = e_r = \partial_r = \cos\theta\, \partial_x + \sin\theta\, \partial_y$
et $e_2 = e_\theta = \frac{1}{r}\partial_\theta = -\sin\theta\, \partial_x + \cos\theta\, \partial_y$
[(x, y) sont des coordonnées euclidiennes.]

Donc $\eta_1 = dr$ (pour que $\eta_1(e_1) = 1$, $\eta_1(e_2) = 0$)

$\eta_2 = r\,d\theta$ ($\eta_2(e_2) = 1$, $\eta_2(e_1) = 0$)

$df = \cancel{\partial_r f\, dr + \partial_\theta f\, d\theta = \partial_r f\, \eta_1 + \frac{1}{r}\partial_\theta f\, \eta_2}$ inutile
$* df = \cancel{\partial_r f\, \eta_2 - \frac{1}{r}\partial_\theta f\, \eta_1}$

$df = (e_r . f)\eta_1 + (e_\theta . f)\eta_2$

$* df = (e_r . f)\eta_2 - (e_\theta . f)\eta_1$

$d * df = d(e_r . f)\wedge \eta_2 + e_r . f\, d\eta_2$

$- d(e_\theta . f)\wedge\eta_1 - \cancel{e_\theta . f\, d\eta_1}$

$d\eta_1 = 0 \quad d\eta_2 = dr\wedge d\theta = \frac{1}{r} d\eta_1 \wedge d\eta_2$

$d(e_r . f)\wedge\eta_2 = (e_r . (e_r . f)\eta_1)\wedge\eta_2$

et $d(e_\theta . f) \wedge \eta_1 = (e_\theta . (e_\theta . f)\eta_2) \wedge \eta_1$

Donc $\boxed{\Delta f = e_r . e_r . f + \frac{1}{r} e_r . f + e_\theta . e_\theta . f}$

ou $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$

Bref, revenons à notre calcul.

$$h_t = \frac{1}{e^{4t} + r^2} \qquad \psi_t = \frac{1}{2} \log h_t$$

• $\partial_t h_t = -4 e^{4t} h_t^2 \qquad \partial_r h_t = -2r\, h_t^2$

$$\partial_r \psi = \frac{\partial_r h_t}{2\, h_t} = \frac{-r\, h_t^2}{h_t} = -r\, h_t$$

$$\partial_r^2 \psi = -r\, \partial_r h_t - h_t = 2r^2 h_t^2 - h_t$$

Donc $\Delta \psi = \partial_r^2 \psi + \frac{1}{r} \partial_r \psi$

$$= 2r^2 h_t^2 - h_t - h_t$$

$$= 2 (r^2 h_t^2 - h_t)$$

$$= 2 h_t^2 \left(r^2 - \frac{1}{h_t} \right) = 2h_t^2 (-e^{4t})$$

(••) $$= -2 e^{4t} h_t^2 = \frac{1}{2} \partial_t h_t \quad (\text{par } \bullet)$$

On a donc bien $\partial_t h_t = 2 \Delta \psi_t$ ⊠

g_t est donc une solution du flot de Ricci.

Quelle géométrie ? $\quad g_0 = h_0 \, g_{can} = \frac{g_{can}}{1+r^2}$

Par la formule de la courbure pour les métriques conformes on trouve

$$K_0 = e^{-2\varphi_0}\left(K_{can} - \Delta_{can}\varphi_0\right)$$

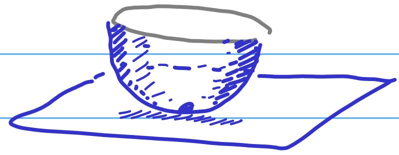
$$= -e^{-2\varphi_0}\Delta_{can}\varphi_0$$

$$= -\frac{1}{h_0}\Delta\varphi_0 \underset{(\circ\circ)}{=} \frac{2h_0^2}{h_0} = 2h_0 = \frac{2}{1+r^2}$$

Pour $r \sim 0$ $\quad g_0 \sim g_{can} + O(r^2)$

mais attention la courbure n'est pas petite

$K_0 \sim 2 + O(r^2)$

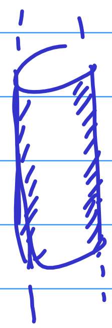


Pour r grand $\quad K = O\left(\frac{1}{r^2}\right) \to 0$

$$g_0 \sim \frac{g_{can}}{r^2} = \frac{dx^2+dy^2}{r^2}$$

Soit $m(r)$ un point sur le cercle euclidien $B_{can}(0,r)$

$\hookrightarrow g_0(m(r)) \simeq \frac{r^2}{r^2} = 1$



On a un cylindre

Effectivement si on écrit

dans la base e_r, e_θ

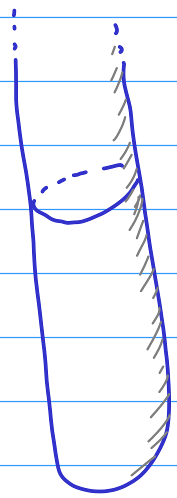
$\|e_r\|_{can} = 1 \qquad \|e_\theta\|_{can} = 1$

donc $\|\partial_\theta\|^2 = r^2$ et $\langle \partial_\theta, \partial_r \rangle = 0$

Donc dans les coordonnés (r, θ) on a
$$g_{can} = dr^2 + r^2 d\theta^2 \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

donc $g_0 \sim \dfrac{dr^2}{r^2} + d\theta^2 = d(\ln r)^2 + d\theta^2$

Donc dans les coordonnés $(\ln r, \theta)$ on a un cylindre plat



Remarque : si on fait le changement de variables (dépendant du temps)

$$x = e^{2t} u \qquad X_t(u,v) = (x,y)$$
$$y = e^{2t} v$$

La métrique g_t devient $X_t^* g_t = \dfrac{e^{4t}(du^2 + dv^2)}{e^{4t} + e^{4t}(u^2+v^2)}$

$$= \frac{du^2 + dv^2}{1 + u^2 + v^2} \cong g_0$$

Donc toutes les g_t sont "isométriques" à g_0 (dans ces nouvelles coordonnées)

$$(\mathbb{R}^2, g_t) \xleftarrow{X_t} (\mathbb{R}^2, g_0)$$

Donc bien que $g_t \to 0$ quand $t \to 0$ on voit que la "forme" de $(\mathbb{R}^2, g_t)$ reste la même

(d'où le nom "soliton" ?)

III Forme scalaire du flot de Ricci

(déjà fait par Florian-sans log)

$$\partial_t g_t = -2 K_{g_t} \cdot g_t \quad \circledast$$

donc $g_t = e^{2\varphi_t} g_0$ avec $\varphi_t = \int_0^t -K_{g_s}\, ds$

on peut réexprimer $\circledast$ en fonction de φ_t

On sait que les g_t sont conformes et donc que

$$K_{g_t} = e^{-2\varphi_t}\left(K_{g_0} - \Delta_{g_0} \varphi_t\right)$$

Sachant que $\partial_t \varphi_t = -K_{g_t}$

l'équation s'écrit donc

soit $$\boxed{\partial_t \varphi_t = e^{-2\varphi_t}\left(\Delta_0 \varphi_t - K_0\right)} \quad (\ast\ast)$$

On a donc une EDP non triviale en $\varphi_t = \varphi_t(x)$
$= \varphi(t, x) \qquad \varphi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ scalaire

Remarque (Rappel) Une autre équation scalaire équivalente est celle de la courbure :

On a $e^{2\varphi_t} K_t = K_0 - \Delta_0 \varphi_t \quad \Big) \partial_t$

$(-2K_t^2 + \partial_t K_t)\, e^{2\varphi_t} = +\Delta_0 K_t$ donc

$$\boxed{\partial_t K_t = \underbrace{\Delta_t}_{\text{pas très pratique...}} K_t + 2 K_t^2}$$

Il peut être utile d'écrire l'équation pour $h = e^{2\varphi}$

$\partial_t h = 2\,\partial_t\varphi \cdot h \qquad \partial_t \varphi = \frac{1}{2}\,\partial_t h / h$

Comment calculer $\Delta_0 \varphi_t$?

Que vaut $\operatorname{grad}(\log h)$?

Par définition $i_{\operatorname{grad}(\log h)}\, g = d(\log h) = \frac{dh}{h}$

donc $i_{h \operatorname{grad}(\log h)}\, g = dh = i_{\operatorname{grad} h}\, g$

Donc on a la formule naturelle $\operatorname{grad}(\log h) = \frac{\operatorname{grad} h}{h}$

Donc

$$\Delta(\log h) = \operatorname{div}\left(\frac{\operatorname{grad} h}{h}\right)$$

L'équation $(**)$ se réécrit

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial_t h}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{2}\operatorname{div}\frac{\operatorname{grad} h}{h} - K_0\right)$$

soit

$$\boxed{\partial_t h = \operatorname{div}\frac{\operatorname{grad} h}{h} - 2K_0}$$

IV Variation du volume

Dans le cas de la courbure constante on avait vu que
$$g_t = (1-2K_0 t)\, g_0$$

Donc les formes volume vérifient

$$d\,vol_t = (1-2K_0 t)\, d\,vol_0$$

en intégrant

$$Vol(M, g_t) = \int_M d\,vol_t = (1-2K_0 t)\, Vol(M, g_0)$$

Le volume varie donc linéairement en t.
Ce qui est absolument remarquable est que ce phénomène est général

> **Proposition** Soit g_t une solution du flot de Ricci (sur un intervalle $t \in I$)
> Alors le volume $Vol(M, g_t)$ est une fonction affine de t. Plus précisément
> $$\frac{d}{dt} Vol_t = -4\pi \chi(M)$$
> où
> $\chi(M)$ est la caractéristique d'Euler de M.

Preuve. Pour des métriques conformes, on a vu (Florentan) que $d\,vol_t = e^{2\varphi_t}\, d\,vol_0$
donc $\partial_t(d\,vol_t)$ est forme volume (éventuellement nulle) donnée par $\partial_t(d\,vol_t) = 2\partial_t\varphi\; d\,vol_t$

Mais on sait aussi que $\partial_t \varphi = -K_t$

Donc $\frac{d}{dt}(\mathrm{Vol}_t) = \frac{d}{dt}\int_M d\mathrm{vol}_t$

$$= \int_M \frac{d}{dt} d\mathrm{vol}_t = \int_M -2K_t \, d\mathrm{vol}_t$$

Montrons que cette quantité est constante

$$\int K_t \, d\mathrm{vol}_t = \int e^{-2\varphi_t}(K_0 - \Delta_0 \varphi_t) \, d\mathrm{vol}_t$$

$$= \int (K_0 - \Delta_0 \varphi_t) \, d\mathrm{vol}_0$$

On rappelle que $\Delta_0 \varphi_t$ est une divergence $\rightarrow$ intégrale nulle

ou bien que $\Delta_0 \varphi_t \, d\mathrm{vol}_0 = d(* d\varphi_t)$

donc intégrale nulle par Stokes (si M est compacte et $\partial M = \emptyset$)

Remarques: 1) Même sans le flot de Ricci,

en fait on sait déjà que $\int K_g \, d\mathrm{vol}_g$

est un invariant conforme : si $\tilde{g} = e^{2\varphi} g$

alors (Flot et an) $d\mathrm{vol}_{\tilde{g}} = e^{2\varphi} d\mathrm{vol}_g$

et $K_{\tilde{g}} = e^{-2\varphi}(K_g - \Delta_g \varphi)$

donc

$$K_{\tilde{g}} \, d\mathrm{vol}_{\tilde{g}} = K_g \, d\mathrm{vol}_g - \Delta_g \varphi \, d\mathrm{vol}_g$$

et on utilise que $\int_M \Delta_g \varphi \, d\mathrm{vol}_g = 0$.

Bien sûr $\chi(M)$ est bien mieux qu'un invariant conforme puisque c'est un invariant topologique.

2) On se rappelle aussi (Florentin) que localement

$$-K_t \, d\mathrm{vol} = d\omega_t$$ où ω_t est la forme

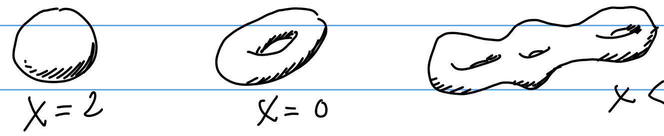
de connexion de Levi-Civita. Donc l'intégrale $\int K_t \, d\mathrm{vol}_t$ ne dépend pas vraiment de la métrique g_t mais seulement de la connexion ∇_t. En fait, même pas : car un autre choix de connexion (pour le même transport parallèle) est de la forme $\tilde{\omega} = \omega + df$ ...

Il resterait à démontrer que cette constante est $2\chi(M)$ (c'est Gauss-Bonnet.)

Preuve de Gauß-Bonnet ?

Discussion. On a donc $\mathrm{Vol}(M, g_t) = \mathrm{Vol}(M, g_0) - 4\pi \chi(M) t$
(si M compacte)

Rappel $\chi(M) = 2 - 2\,\text{genre}$ genre $= \#$ tores



Rem : dans le calcul on a vu dvol comme une 2-forme (forme volume) et non pas comme une densité $|d\mathrm{vol}|$
Il est donc possible d'obtenir un résultat négatif mais seulement si g_t n'est pas de signe constant $\to$ ce n'est plus une métrique. Le calcul donne vraiment le volume (si M est orientée) seulement tant qu'il ne s'annule pas pour t dans un intervalle contenant 0.

(a) "Solutions anciennes" (ou antiques ?)

- Si la solution existe depuis la nuit des temps ($t = -\infty$) alors $\chi(M) \geqslant 0$

(b) "Solutions immortelles"

- Si la solution existe $\forall t > 0$, alors $\chi(M) \leq 0$

V Flot de Ricci renormalisé

Pour modifier "uniquement la forme" de (M,g) sans bouger le volume (imaginer un ballon de baudruche) on ne modifie l'équation pour imposer la préservation du volume.

Posons $\kappa(g) = \dfrac{\int_M K_g \, dvol_g}{Vol(M,g)}$ pour toute métrique g. $\in \mathbb{R}$ $= \dfrac{2\pi\chi(M)}{Vol\, g}$

On considère la nouvelle équation

$$\partial_t g_t = 2(\kappa(g) - K_g) . g_t \qquad g_{t=0} = g_0$$

Comme précédemment on a $g_t = e^{2\tilde{\varphi}_t} g_0$
avec $\partial_t \tilde{\varphi}_t = \kappa(g) - K_g$

Donc $dvol_t = e^{2\tilde{\varphi}_t} dvol_0$

donc $\dfrac{d}{dt} \int_M dvol_t = \int_M 2(\kappa(g) - K_g)\, dvol_t$

$$= 2\kappa(g) \int_M dvol_t - 2\int_M K_g \, dvol_t$$

$$= 2 \int K_g \, dvol - 2\int K_g \, dvol = 0$$

Le volume $Vol(M, g_t)$ est constant.
(Du coup si g_t est solution $\kappa(g_t) = \kappa(g_0)$ constante κ_0
Rem) Si $\kappa_0 = 0$ (tore) c'est juste le flot de Ricci standard.

Rem : 2) Si $K_g \equiv \text{const}$ alors $\kappa(g) = K_g$ et $g_t = g_0 \ \forall t$
(Voir l'exemple 1) Les métriques à courbure constante sont point fixes du flot renormalisé.

Prop Si $\tilde{g}_s$ est solution du flot de Ricci normalisé, alors on peut facilement retrouver le flot de Ricci g_t (et réciproquement), par la formule (si $\kappa_0 \neq 0$)

$$\tilde{g}_s = e^{2\kappa_0 s} g_t \qquad \text{avec } t = \frac{1 - e^{-2\kappa_0 s}}{2\kappa_0}$$

Preuve : Cherchons $\tilde{g}_s = a(s)\, g_{b(s)}$, $t = b(s)$ $b(0) = 0$ $a(0) = 1$

$$\partial_s \tilde{g}_s = a' g_t + a b' \partial_t g_t$$
$$2(\kappa_0 - K_{\tilde{g}_s})\tilde{g}_s = a' g_t - 2ab' K_{g_t} \cdot g_t$$
$$2(\kappa_0 - K_{\tilde{g}_s})\, a\, \cancel{g_t} = (a' - 2ab' K_{g_t})\, \cancel{g_t}$$

On sait aussi que $\tilde{g}_s$ est conforme à g_t donc
$$K_{\tilde{g}_s} = e^{-2\varphi_s}(K_{g_t} - \Delta_{g_t}\varphi) \quad \text{avec ici } e^{2\varphi(s)} = a(t) \text{ donc } \Delta\varphi = 0$$

et $$\kappa(\tilde{g}_s) = \frac{2\pi\chi(M)}{\mathrm{Vol}_{\tilde{g}_s}} = \frac{2\pi\chi(M)}{V_0} = \text{const} = \kappa_0$$

Donc $$2\left(\kappa_0 - \frac{K_{g_t}}{a}\right)a = a' - 2ab' K_{g_t}$$

ou $$2\kappa_0 a - a' + K_{g_t}(-2 + 2ab') = 0$$

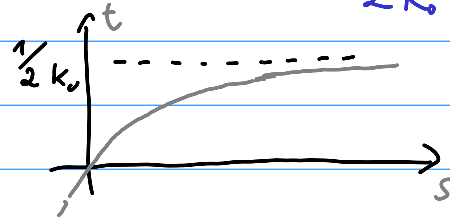
Il est suffisant de résoudre $\begin{cases} a' = 2\kappa_0 a \\ b' = \dfrac{1}{a} \end{cases}$

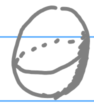
Soit $a(s) = e^{2\kappa_0 s}$ et donc $b' = e^{-2\kappa_0 s}$
soit $b(s) = \dfrac{1 - e^{-2\kappa_0 s}}{2\kappa_0}$ ☒

Discussion : $t = \frac{1-e^{-2k_0 s}}{2k_0}$

- toujours ok pour $t \sim 0$ mais après ça dépend de k_0.

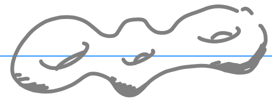
ⓐ $k_0 > 0$ $\quad t \longrightarrow \frac{1}{2k_0}$ $\quad$ (sphère)

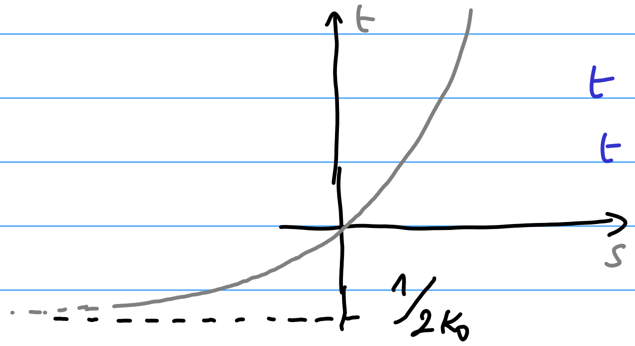




donc g_t existe pour $t \in]-\infty, \frac{1}{2k_0}[$ $\iff$ $\tilde{g}_s$ existe pour $s \in \mathbb{R}$

ⓑ $k_0 < 0$





$t \to \infty \iff s \longrightarrow +\infty$

$t \to \frac{1}{2k_0}^+ \iff s \longrightarrow -\infty$

Rem Reprenons le cas de la courbure constante

$$g_t = (1-2K_0 t)\, g_0$$

On obtient $\tilde{g}_s = e^{2K_0 s}\left(1-2K_0\left(\frac{1-e^{-2K_0 s}}{2K_0}\right)\right) g_0$

$$= e^{2K_0 s} e^{-2K_0 s} g_0$$

$$= g_0$$

On retrouve bien que $\partial_s \tilde{g}_s = 0$.

Equation scalaire du flot de Ricci normalisé

Prop $\tilde{g}_s$ est solution du flot de Ricci normalisé :

$$\tilde{g}_s = e^{2\tilde{\varphi}_s} g_0 \quad \text{avec} \quad \tilde{\varphi}_s = tK_0 - \int^s K_{\tilde{g}_s}$$

et
$$\partial_s \tilde{\varphi} = e^{-2\tilde{\varphi}}\left(\Delta_{g_0}\tilde{\varphi} - K_{g_0}\right) + K_0$$

Preuve 1 Par la prop précédente

$$\tilde{g}_s = e^{2K_0 s} g_t = e^{2K_0 s} e^{2\varphi_t} g_0$$

$$\tilde{g}_s = e^{2\tilde{\varphi}_s} g_0$$

donc $\tilde{\varphi}_s = K_0 s + \varphi_t$

$$t = \frac{1-e^{-2K_0 s}}{2K_0} \qquad \frac{\partial t}{\partial s} = e^{-2K_0 s}$$

$$\partial_s \tilde{\varphi}_s = K_0 + \partial_t \varphi_t \cdot e^{-2K_0 s}$$

et on sait que $\partial_t \varphi_t = e^{-2\varphi_t}\left(\Delta_{g_0}\varphi_t - K_{g_0}\right)$

Preuve 2 Directe (permet de montrer la prop précédente ?)

$$\partial_s \tilde{\varphi}_s = K_0 - K_{\tilde{g}(s)} \quad \text{et} \quad K_{\tilde{g}(s)} = e^{-2\tilde{\varphi}_s}(K_{g_0} - \Delta_{g_0}\varphi)$$

c'est immédiat.

!! Preuve de la prop préc. (bis)

On a donc $g_t = e^{2\varphi_t} g_0$ et $\tilde{g}_s = e^{2\tilde{\varphi}_s} g_0$

avec

$$\partial_t \varphi = e^{-2\varphi_t}(\Delta_g \varphi_t - K_{g_0})$$

$$\partial_s \tilde{\varphi} = K_0 + e^{-2\tilde{\varphi}_s}(\Delta_g \tilde{\varphi}_s - K_{g_0})$$

$$\partial_s(\tilde{\varphi} - K_0 s) = e^{-2(\tilde{\varphi} - K_0 s)} e^{-2K_0 s}(\Delta_{g_0}(\tilde{\varphi} - K_0 s) - K_{g_0})$$

$$\partial_s(\tilde{\varphi} - K_0 s) \cdot e^{2K_0 s} = e^{-2(\tilde{\varphi} - K_0 s)}(\underline{\qquad\qquad})$$

Posons $a(s) \cdot e^{2K_0 s} = a(s(t))\, s'(t) = \dfrac{d}{dt}(a(s(t)))$

$t'(s) = e^{-2K_0 s}$

$$\partial_t \Big(\underbrace{(\tilde{\varphi} - K_0 s)(s(t))}_{\psi(t)}\Big) = e^{-2\psi(t)}(\Delta_g \psi - K_{g_0})$$

Donc $\psi(t)$ et $\varphi(t)$ vérifient la même équation

En supposant qu'on ait unicité ... $\tilde{\varphi}(s) - K_0 s = \varphi(t)$ ok !

Version logarithmique On reprend le calcul précédent

$\tilde{h} = e^{2\tilde{\varphi}}$ On avait $\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial_t h}{h} = \dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{div}\dfrac{\operatorname{grad} h}{h} - K_{g_0}\right)$

il suffit d'ajouter le terme K_0 soit

$$\boxed{\partial_t \tilde{h} = \operatorname{div}\frac{\operatorname{grad}\tilde{h}}{\tilde{h}} - 2K_{g_0} + 2\tilde{h}K_0}$$

Équation sur la courbure

On a vu (Florestan) que si $\partial_t g_t = 2 f_t g_t$
alors

$$\partial_t K_{g_t} = -\Delta_{g_t} f - 2 f \cdot K_{g_t}$$

Donc pour Ricci renormalisé on prend $f = K_0 - K_{g_t}$ et on obtient

$$\boxed{\partial_t K_{g_t} = \Delta K_{g_t} + 2 (K_{g_t} - K_0) K_{g_t}}$$

chaleur — non linéarité

On verra plus tard qu'il y a existence et unicité locale en t (globale sur M) et globale en temps $t \geq 0$ si $\chi(M) < 0$. A la limite on obtient une métrique à courbure constante $= K_0$